

Ein gesuchter, dennoch bislang unbekannter elementarer Satz

Andreas Johann Raab
Luisenstrasse 60, 80798 München,
Federal Republic of Germany
E-mail:andreas@andreasjohannraab.de

7. April 2009

Ein Beitrag zur Theorie kontinuierlicher dynamischer Systeme,
insbesondere zur Ergodenfrage derselben.

The Subject

In this tractatus we present the elementary theorem 1.1, which we call the elementary quasiergodic theorem. We call it elementary, because it is limited to finit-dimensional real phase-spaces and we call it the elementary quasiergodic theorem, because it answers the following question: Given a continuous dynamical system, which has piecewise differentiable trajectories $\tau \subset \zeta$ in a finit-dimensional real phase-space $\zeta \subset \mathbb{R}^n$, which is compact, let its trajectories define a field of normed tangents, which is continuous in almost each point of the phase-space ζ : Which are the sets $\chi \subset \zeta$ of the phase-space, which are quasiergodic?

The set of all trajectories or fixed points of this continuous dynamical system forms a partition γ of its phase-space ζ . A set $\chi \subset \zeta$ is quasiergodic, if and only if the following implication is true:

$$x, y \in \chi \wedge x \in \tau \in \gamma \Rightarrow y \in \mathbf{cl}(\tau) .$$

Thus we regard both, closed trajectories and fixed points, as quasiergodic, though in the generic case a quasiergodic set turns out to be a multidimensional manifold. Let $\tau_1 \subset \zeta$ and $\tau_2 \subset \zeta$ be two of those trajectories. We will show, that if in this case τ_1 and the topological hull $\mathbf{cl}(\tau_2)$ are not disjoint, then

$$\mathbf{cl}(\tau_2) = \mathbf{cl}(\tau_1)$$

coincides. Let us itemize the premisses of the elementary quasiergodic theorem:

1. The phase-space $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ is bounded.
2. Each trajectory τ representing a single development is piecewise differentiable.
3. The field of normed tangents of the trajektories is continuous in almost each point of the phase-space ζ . If and only if the field of normed tangents of the trajektories is continuous in almost each point of the phase-space, we say, that the field of normed tangents is locally parallel in almost each point of the phase-space.

Whereat this form of continuity in almost each point of the phase-space stands for the circumstance, that the Lebesgue-measure of the set of points

of discontinuity of the field of normed tangents is zero. If this three itemized premisses are true and if χ is one of the quasiergodic sets, then the equivalences

$$\tau_1 \cap \chi \neq \emptyset \wedge \tau_2 \cap \chi \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{cl}(\tau_1) = \mathbf{cl}(\tau_2)$$

and

$$\chi = \mathbf{cl}(\tau) \Leftrightarrow \tau \cap \chi \neq \emptyset$$

are true. We will show, that if this three itemized premisses are true, then there exists a partition

$$\Gamma = \{\mathbf{cl}(\tau) : \tau \in \gamma\}$$

of the phase-space $\zeta \subset \mathbb{R}^n$. This is the statement of the theorem of the existence of zimmers 2.1.2 and it is the main statement of the elementary quasiergodic theorem 1.1. Each set $\chi \in \Gamma$ we call a zimmer.¹ Any zimmer is the topological hull of a trajectory or a fixed point $\tau \in \gamma$. Only closed trajectories or fixed points $\tau \in \gamma$ are identical to their topological hulls $\mathbf{cl}(\tau)$. We shall call any zimmer trivial, if and only if it is a trajectory or a fixed point $\mathbf{cl}(\tau) = \tau$. Otherwise we shall call any zimmer non-trivial.

The set of the non-trivial zimmers of the phase-space $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ is the subset Γ of those topological hulls, which are not one- or zero-dimensional. Anyway each zimmer is an attractor.

Thus the theorem of the existence of zimmer 2.1.2. already answers the question, which are the sets $\chi \subset \zeta$ of the phase-space, which are quasiergodic. However we fish for another determination of the quasiergodic sets of a given dynamical system fulfilling the three itemized criteria. We search for a determination of its quasiergodic sets formed by its invariants. We find, that there is the linear homogenous partial differential equation of first order (1.32), which allows us the construction of the quasiergodic sets, because the quasiergodic sets are identical to minimal invariant manifolds. This is the other part of the statement of the elementary quasiergodic theorem: The quasiergodic sets are identical to the minimal invariant manifolds. The conception of minimal invariant manifolds is presented in the first chapter of this tractatus. We told, that zimmers are attractors. Furthermore we will show in this tractatus, that any non-trivial zimmer is a sensitive attractor. This is the statement of the theorem of sensitiveness of non-trivial zimmers 2.2.2.

¹You can not find this term in the literature, because it is introduced in this tractatus. 'Zimmer' is the german word for room or apartment, which F.Hölderlin uses in the title of one of his short Scardanelli-poems. You find this poem in the german version of this abstract.

Unser Gegenstand

An Zimmern

*Die Linien des Lebens sind verschieden,
Wie Wege sind, und wie der Berge Grenzen.
Was hier wir sind, kann dort ein Gott ergänzen
Mit Harmonien und ewigem Lohn und Frieden.*

Friedrich Hölderlin

Wir beweisen hier einen elementaren Satz, den Satz 1.1, den wir den elementaren Quasiernodensatz nennen. Dessen Aussage können wir insofern als die Lösung eines altbekannten Problems ansehen:

Wenn ein dynamisches System vorliegt, dessen Zustandsentwicklungen stückweise stetig differenzierbare Trajektorien eines endlichdimensionalen reellen Zustandsraumes darstellen, deren Einheitstangenten in fast jedem Zustand existieren und die dabei ein fast überall stetiges Einheitstangentenfeld festlegen, dann beantwortet dieser Satz nämlich die folgende Frage:

Welche Teilmengen χ dieses beschränkten und endlichdimensional-reellen Zustandsraumes $\xi \subset \mathbb{R}^n$ sind so beschaffen, dass innerhalb dieser Teilmengen $\chi \subset \xi$ Quasiernodik gegeben ist?

Wir betrachten ein in der Form kontinuierliches dynamisches System, dass alle jeweiligen Zustandsentwicklungen, die durch lauter jeweilige stückweise glatte und zusammenhängende Trajektorien τ_1 wiedergegeben sind, fast überall ein Feld der Tangenten an dieselben festlegen, das auf dem Zustandsraum fast überall stetig ist. Jede Trajektorie τ_1 , die χ schneidet, verläuft dann so, dass jede andere Trajektorie τ_2 der Trajektorie τ_1 genau dann beliebig nahe kommt, wenn diese andere Trajektorie τ_2 ebenfalls χ schneidet. Genau dann liegt τ_2 in der abgeschlossenen Hülle $\text{cl}(\tau_1)$ von τ_1 , die χ ist. Listen wir die Voraussetzungen auf!

1. Der Zustandsraum ξ ist beschränkt.
2. Jede Trajektorie τ , die eine Zustandsentwicklung repräsentiert, ist stückweise glatt.
3. Die Trajektorien verlaufen fast überall im Zustandsraum lokal parallel. Genau dann, wenn die Zustandsentwicklungen so beschaffen sind, dass

die Einheitstangenten an die mit den Zustandsentwicklungen identifizierbaren Trajektorien im jeweiligen Zustandsraum ξ fast überall gegen einander konvergieren, sagen wir, dass diese Trajektorien fast überall lokal parallel verlaufen.

Die Modifizierung überall gegebener lokaler Parallelität zur fast überall vorliegenden lokalen Parallelität bezieht sich hierbei auf das Lebesgue-Mass des jeweiligen Zustandsraumes. Die Menge der Zustände, in denen die Trajektorien kein stetiges Einheitstangentenfeld festlegen, ist eine Lebesgue-Nullmenge. Wenn 1., 2. und 3. gilt, gibt es immer eine Partition Γ des Zustandsraumes ξ von der Art, dass für alle jeweils Zustandsentwicklungen darstellenden Trajektorien $\tau_1, \tau_2 \subset \xi$ und für alle Teilmengen dieser Partition $\chi \in \Gamma$ die Äquivalenz

$$\tau_1 \cap \chi \neq \emptyset \wedge \tau_2 \cap \chi \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{cl}(\tau_1) = \mathbf{cl}(\tau_2) \quad (1)$$

gilt. Daher gilt auch die Äquivalenz

$$\chi = \mathbf{cl}(\tau) \Leftrightarrow \tau \cap \chi \neq \emptyset \quad (2)$$

für alle Zustandsentwicklungen τ und für alle Teilmengen $\chi \in \Gamma$ des Zustandsraumes ξ , die Elemente dieser Partition Γ sind.

Die allgemeine Beantwortung der Frage, welche Teilmengen χ dieses beschränkten und endlichdimensional-reellen Zustandsraumes $\xi \subset \mathbb{R}^n$ unter der Voraussetzung, dass 1., 2. und 3. gelten, so beschaffen sind, dass innerhalb dieser Teilmengen $\chi \subset \xi$ Quasiergodik vorliegt, ist uns damit gegeben: Diese Teilmengen χ sind die abgeschlossenen Hüllen $\chi = \mathbf{cl}(\tau)$ von Zustandsentwicklungen darstellenden Trajektorien τ . Dieselben nennen wir Zimmer. Zimmer sind also kompakt. Insofern haben wir zu zeigen, dass unter den skizzierten Voraussetzungen der Beschränktheit des Zustandsraumes, der stückweisen Glätte der Trajektorien und der fast überall gegebenen lokalen Parallelität der Trajektorien die Äquivalenz (1) gilt.

Es bleibt dann aber noch die Frage, welche jeweiligen Teilmengen derartige Zimmer im Phasenraum eines jeweils konkret vorgelegten dynamischen Systemes sind. Die jeweilige Beantwortung dieser konkreten Frage scheint darin zu bestehen, immer eine jeweilige lineare, homogene, partielle Differenzialgleichung 1.Ordnung formulieren zu können, nämlich die partielle Differenzialgleichung (1.32), deren Lösungen die Mannigfaltigkeiten aus der Partition Γ festlegen, die die mit den Zimmern koinzidierenden minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten sind. Gerade die Einsichten dieses Traktates lassen uns

ahnen, dass mittels dieser partiellen Differenzialgleichung (1.32) die Zimmer im Einzelfall zu bestimmen, allerdings mit Schwierigkeiten behaftet ist. Diese Schwierigkeiten fassen wir als eine eigene Problematik und als ein eigenes Thema auf, das diese Abhandlung nur streift.

Unter den skizzierten Voraussetzungen 1.–3. sind jene Zimmer Mannigfaltigkeiten und daher genau dann eindimensionale Mannigfaltigkeiten, wenn sie geschlossene Trajektorien sind. Andernfalls zeigen sie sensitives Verhalten, wie dies aus dem Satz 2.2.2 hervorgeht. Exakt alle diese sensitiven, nicht eindimensionalen Zimmer nennen wir nicht-triviale Zimmer. Die Menge $\mathbf{cl}(\tau) \setminus \tau$ ist für alle in diesen mehrdimensionalen Zimmern $\mathbf{cl}(\tau)$ liegenden Trajektorien τ nicht leer.

Zimmer sind Attraktoren² und nicht-triviale Zimmer sind gemäss dem Satz 2.2.2 sensitive Attraktoren. Diese Attraktoren, die Zimmer, sind insofern elementar, als es im Phasenraum des jeweiligen Systemes keine kleineren Attraktoren gibt. Die Nondekomponierbarkeit schon von Attraktoren bedingt diese Elementarität, welche durch deren Sensitivität im Fall mehrdimensionaler Attraktoren dramatisiert ist. Denn entweder nicht-triviale Zimmer oder aber geschlossene Trajektorien, die jeweils eine periodische Zustandsentwicklung darstellen, sind insofern überall im Zustandsraum:

Der Zustandsraum eines Systemes mit den Eigenschaften 1. – 3. ist nach (1) und (2) partitioniert in elementare Attraktoren, die entweder geschlossene Trajektorien oder aber im generischen Fall sensitive Attraktoren sind: Im Sinn dieser Aussage sind sensitive Attraktoren der universelle Normalfall und Periodizität ist die Ausnahme von diesem Normalfall.

Wenn ein System mit den Eigenschaften 1.-3. gegeben ist, können wir uns demnach in die berühmteste Dramatik werfen: Ob dann ein Zustand der eines

sensitiven Attraktors oder eines Zyklus oder ein Fixpunkt ist, das ist nun die Frage ,

die sich nach dem elementaren Quasiergodensatz für jeden Zustand eines jeweils vorgelegten dynamischen Systemes mit den Eigenschaften 1.-3. stellt.

²Sowohl die übliche, hier geltende Definition von Attraktoren als auch die Definition von sensitiven Attraktoren findet sich hier im Unterabschnitt 2.2.

Inhaltsverzeichnis

1	Was ist das Quasiernodenproblem?	8
1.1	Grundbegriffe für die formale Fassung des Quasiernodenproblems	10
1.1.1	Flussfunktionen und trajektorielle Partitionen	10
1.1.2	Minimale invariante Mannigfaltigkeiten und die Relativierung der Homöomorphie	19
1.1.3	Die Formulierung des elementaren Quasiernodensatzes	34
2	Der Beweis des elementaren Quasiernodensatzes	44
2.1	Erster Schritt: Der reelle Determinismus impliziert, dass Zimmer existieren.	44
2.2	Unverhofftes Wiedersehen: Zimmer sind sensitive Attraktoren.	65
2.2.1	Was sind sensitive Attraktoren?	65
2.2.2	Die zustandsweise Sensitivität nicht trivialer Zimmer .	72
2.3	Zweiter Schritt: Maximale Quasiernodik und kinezentrische Felder	83
3	Anhang: kommentierende Ergänzungen	92

Kapitel 1

Was ist das Quasiergodenproblem?

Allen Geduldigen: Bestandsaufnahme.

Sind wir nun reich? Nein, denn es ist kein Preisgeld auf die Lösung des Quasiergodenproblemekes gesetzt. Und deshalb ist auch nicht mit wenigstens derjenigen Genauigkeit bestimmt, die rechtliche Ansprüche geltend machbar liesse, was als eine Lösung des Quasiergodenproblemekes anerkannt werden müsste; wenngleich auch eine juristisch tragfähige Formulierung der Bedingungen dafür, das Preisgeld zu beanspruchen, immer eine solche wäre, die naturgemäss noch nicht auf der Sachverhaltskenntnis beruhen könnte, die erst nach der Problemlösung vorliegen kann.

Was ist das Quasiergodenproblem überhaupt? Wir können und müssen wohl darauf antworten, dass die Negation oder die Bestätigung der sogenannten Quasiergodenhypothese als die Lösung des nämlichen Problemekes gelten darf. Zu Beginn des Jahrzehntes des ersten Weltkrieges formulierten P. und T. Ehrenfest schliesslich die Quasiergodenhypothese als die minimalinvasive Abwandlung der unhaltbaren Ergodenhypothese Ludwig Boltzmanns aus dem Jahre 1885.

Ludwig Boltzmann hatte seinerzeit jene Behauptung aufgestellt, dass jede Trajektorie der Energiehyperfläche eines Vielteilchensystemekes dieselbe durchlaufe, die als Ergodenhypothese bekannt ist. Diese für den Physiker augenscheinlich sehr greifbare Fassung der Ergodenhypothese ist dadurch bestimmt, dass ihr Gelten eine hinreichende Begründung der Gleichheit der sogenannten Zeitmittel und Scharmittel ermöglicht. Boltzmann deckt also

mit der Ergodenhypothese seinen Bedarf nach einer Aussage, die die Identität der Zeitmittel mit den Scharmitteln trägt.

Der Siegeszug der Mengenlehre beginnt erst nach Boltzmanns Fassung der Ergodenhypothese und dieser Siegeszug etabliert ein moderneres Bild, das wir kulturhistorisch mit der mathematischen Modernität schlechthin gleichsetzen können. In diesem Bild ist die Energiehyperfläche formal identifiziert. Sie ist eine Mannigfaltigkeit eines geradzahligdimensionalen reellen Raumes \mathbb{R}^{2n} für $n \in \mathbb{N}$, deren Kontinuität ein Äquivalent der durch die Hamiltonfunktion eines jeweiligen Vielteilchensystemes vorgegebenen Kontinuität ist. Und daher ist die Energiehyperfläche eine ungeradzahligdimensionale, nämlich eine $2n - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Dabei gilt die eingängige Aussage, dass die Dimension einer Mannigfaltigkeit eine topologische Invariante ist, dass es also keine Homöomorphismen zwischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension gibt. Jene eingängige Aussage wurde aber erst später, im Zuge der Entwicklung der mengentheoretischen Topologie, bewiesen. Es gibt also auch keinen Homöomorphismus zwischen einer mehr als eindimensionalen jeweiligen Energiehyperfläche und einer eindimensionalen Trajektorie.

Was allerdings der Fall sein kann, ist, dass die Trajektorien allen Punkten der Energiehyperfläche beliebig nahe kommen. Und gerade dies ist die Idee von P. und T. Ehrenfest, dass die Trajektorien, die die Systementwicklung eines Vielteilchensystemes darstellen, allen Punkten derjenigen Hyperfläche, die durch alle Invariante des Vielteilchensystemes bestimmt ist, beliebig nahe kommt. Die Behauptung dieses Gedankens als die Quasiergodenhypothese zu bezeichnen, die als die minimalinvasive Abschwächung der unhaltbaren Ergodenhypothese Ludwig Boltzmanns gelten darf, lag nahe und diese Benennung verfestigte sich bis heute. Wobei gerade dies die Erkenntnis von P. und T. Ehrenfests ist, dass dann, wenn nur diese Abschwächung der Ergodenhypothese, die Quasiergodenhypothese, gilt, dass dann derjenige Zweck auch erfüllt werden kann, den die Ergodenhypothese erfüllen soll: Wenn die Quasiergodenhypothese gilt, folgt die Identität der Zeitmittel und Scharmittel auch.

Es sind die Belange des Physikers, die hier einen Bedarf nach der Beantwortung einer Frage anmelden, die offenbar ihrem Wesen nach eine mathematische Frage ist. Diese Herkunft aus der Relevanz für die Physik prägt dabei zunächst das Erscheinungsbild einer im Kern mathematischen Frage.

1.1 Grundbegriffe für die formale Fassung des Quasiergodenproblem

1.1.1 Flussfunktionen und trajektorielle Partitionen

Wir ahnen, dass jene besagte Herkunft der Quasiergodenfrage aus dem Bedarf der Physik einerseits dieser wesentlich mathematischen Frage eine Ausprägung gibt. Und wir ahnen, dass andererseits die entsprechende, abstrahiert emanzipierte, rein mathematische Frage, die sich aus der Quasiergodenfrage in ihrer bedarfsgeprägten Form ergibt, eine allgemeinere ist, als deren bedarfsgeprägte Form. Wir bleiben in dieser Abhandlung den Wurzeln der Quasiergodenfrage in der Physik nahe.

Eine Teilmenge $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ eines nicht notwendig geradzahldimensionalen reellen Raumes \mathbb{R}^n für $n \in \mathbb{N}$ soll unseren Zustandsraum darstellen; und dass dabei eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \zeta \times \mathbb{R} &\rightarrow \zeta, \\ (z, t) &\mapsto \Psi(z, t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

die Eigenschaft hat, dass die Mengen

$$\Psi(z, \mathbb{R}) = \{\Psi(z, t) : t \in \mathbb{R}\} \tag{1.2}$$

den Zustandsraum ζ partitionieren, dass also die Implikation

$$\begin{aligned} \Psi(z_1, \mathbb{R}), \Psi(z_2, \mathbb{R}) \in \{\Psi(z, \mathbb{R}) : z \in \zeta\} &:= [\Psi] \Rightarrow \\ \Psi(z_1, \mathbb{R}) \cap \Psi(z_2, \mathbb{R}) &\in \{\emptyset, \Psi(z_1, \mathbb{R})\} \end{aligned} \tag{1.3}$$

gilt, dies modelliert den Determinismus. Jede solche Abbildung Ψ , die gemäß (1.1)-(1.3) beschaffen ist, nennen wir eine Flussfunktion im weiteren Sinn binnen $\zeta \subset \mathbb{R}^n$. Sie sei ferner insofern normiert, als für sie

$$\Psi(\text{id}, 0) = \text{id} \tag{1.4}$$

gelte. Ferner habe jede Flussfunktion Ψ ihre Viabilität, die Eigenschaft, dass für alle $z \in \zeta$ die Alternative

$$\begin{aligned} \Psi(z, \mathbb{R}) &= \{z\} \vee \\ \exists \varepsilon(z) \in \mathbb{R}^+ \forall \vartheta \in]0, \varepsilon(z)[&\Psi(z, \vartheta) \neq z \end{aligned} \tag{1.5}$$

wahr ist. Dabei modelliert die Kontinuität jeder solchen Abbildung Ψ , jeder Flussfunktion binnen ζ also, die Kontinuität des Determinismus. Wenn die

Flussfunktion Ψ binnen ζ eine als Zeitableitung interpretierbare, stetige partielle Ableitung $\partial_2 \Psi$ hat, so modelliert sie gegebenenfalls den Determinismus eines Hamiltonischen Vielteilchensystemes. Denn dessen Hamiltonfunktion ist in dem Fall, dass $n = 2m$ geradzahlig ist, zu einer auf dem Zustandsraum $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ einmal differenzierbaren \mathcal{C}^1 -Funktion H äquivalent, deren Gradient ∇H die Ableitung

$$\partial_2 \Psi(\text{id}, 0) = (\sigma_3 \otimes \mathbf{1}_m) \nabla H \quad (1.6)$$

ist, wobei

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die symplektische Matrix oder die 3.te der Pauli-Matrizen σ_3 und wobei $\mathbf{1}_m$ die $m \times m$ -Einheitsmatrix ist und \otimes das Kroneckerprodukt¹ bezeichne. Dann ist die Gleichung (1.6) das Äquivalent der Hamiltongleichungen, wobei die ersten m Komponenten der Flussfunktion die nicht notwendigerweise kartesischen Ortskoordinaten und die zweiten m Komponenten der Flussfunktion die ihnen jeweils entsprechenden kanonischen Impulskomponenten sind.

Exakt jede eindimensionale Mannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^n natürlicher Dimension $n \in \mathbb{N}$ nennen wir hier eine Trajektorie. Wir nehmen in diese Abhandlung einfachheitshalber diese Redeweise, obwohl diese Bezeichnungsweise damit die Trajektorie aus ihrem wesentlichen partitiv-kollektiven Kontext herausreisst, als eine Menge des Mengensystemes $\{\Psi(z, \mathbb{R}) : z \in \zeta\}$ den Determinismus zu modellieren. Da wir hier aber ohnehin den konstanten Kontext eines Trajektorienkollektives betrachten, das Heine-Descartesch ist, ist diese einfache Sprechweise hier möglich. Wir formulieren den Begriff der Quasizyklizität und den der Zyklizität einer Trajektorie, einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n natürlicher Dimension $n \in \mathbb{N}$: Wir nennen jede Trajektorie $\tau \subset \mathbb{R}^n$ genau dann zyklisch oder geschlossen, wenn sie ihre bezüglich der natürlichen Topologie $\mathbf{T}(n)$ abgeschlossene Hülle

$$\mathbf{cl}(\tau) = \tau$$

¹Das Zeichen „ \otimes “ wird kaum verwendet, um das Kroneckerprodukt zu bezeichnen, das zwar nicht selten durch das Zeichen „ \otimes “ notiert wird, das allerdings geläufigerweise das direkte Produkt bezeichnet. Das direkte Produkt verwenden wir in diesem Traktat zwar gar nicht. Nichtsdestotrotz könnte die Bezeichnung des Kroneckerproduktes mit „ \otimes “ den Leser in die Irre führen. Da es sich bei dem Kroneckerprodukt $A \otimes B$, das im Symbolverzeichnis definiert ist, um eine Art des Pumpens der Matrix B in die Matrix A handelt, halten wir diese Bezeichnungswahl für ideogramatisch vertretbar.

ist. Der Begriff der Quasizyklizität einer Trajektorie ergibt sich, wenn wir die Redeweise erläutern, dass eine Trajektorie $\tau \subset \mathbb{R}^n$ einem Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig nahe komme: Genau dann, wenn es eine positive reelle Zahl ε^+ gibt, für die für alle positiv-reellen Zahlen $\varepsilon \in]0, \varepsilon^+[$

$$\mathbf{card}(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = \varepsilon\} \cap \tau) = \mathbf{card}(\mathbb{N}) \quad (1.7)$$

gilt, sagen wir, dass τ dem Punkt y beliebig nahe komme. Quasizyklisch nun nennen wir eine Trajektorie genau dann, wenn es einen Punkt gibt, dem sie beliebig nahe kommt. Existieren Trajektorien, die nur einem in ihr liegenden Punkt beliebig nahe kommen, die aber zyklisch sind, weil sie dabei zugleich mit ihrer abgeschlossenen Hülle identisch sind? Das können wir uns zunächst vielleicht vorstellen. Die Objektivierbarkeit dieser Imagination können wir aber auf diese Weise negieren:

Jede quasizyklische Trajektorie ist nicht zyklisch. Wäre eine Trajektorie $\tau \subset \mathbb{R}^n$ nämlich zugleich quasizyklisch und zyklisch, so existierte ein Punkt y , dem sie beliebig nahe kommt und dieser läge in ihrer abgeschlossenen Hülle $\mathbf{cl}(\tau)$, die mit der Trajektorie τ wegen deren gleichzeitiger Zyklizität identisch wäre, sodass $y \in \tau$ wäre. Nehmen wir an, die Trajektorie τ sei glatt und habe in allen ihren Punkten eine Tangente, mithin auch in y : Dann führte die Annahme, dass es keine positive reelle Zahl ε^+ gäbe, für die für alle $\varepsilon \in]0, \varepsilon^+[$

$$\mathbf{card}(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = \varepsilon\} \cap \tau) = 2$$

ist, auf einen Widerspruch zum Zwischenwertsatz. Für jeden Homöomorphismus f des \mathbb{R}^n auf denselben gilt dabei offenbar die Äquivalenz

$$\mathbf{card}(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = \varepsilon\} \cap \tau) = \mathbf{card}(\mathbb{N}) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{card}(f(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = \varepsilon\}) \cap f(\tau)) = \mathbf{card}(\mathbb{N}) .$$

Wir können die glatte Trajektorie τ also zu ihrem homöomorphen Bild $f(\tau)$ deformieren und stellen fest, dass Zyklizität und Quasizyklizität einander ausschliessen.

Periodizität und Quasiperiodizität sind zunächst relative Eigenschaften der Zustände der Wertemenge ζ einer Flussfunktion Ψ im Verhältnis zu derselben: Periodisch ist $z \in \zeta$ bezüglich Ψ genau dann, wenn es eine nullverschiedene reelle Zahl $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, für die

$$\Psi(z, T) = z$$

ist. Quasiperiodisch nennen wir $z \in \zeta$ bezüglich Ψ genau dann, wenn es eine streng monoton wachsende Folge $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gibt, für die

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Psi(z, t_j) = z$$

ist und für die es dabei keine nullverschiedene reelle Zahl $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, für die

$$\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in T\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

gilt. Offenbar gilt für eine stetige, d.h., für eine sowohl in ihrer ersten als auch in ihrer zweiten Veränderlichen stetige Flussfunktion Ψ , dass z bezüglich Ψ genau dann periodisch ist, wenn $\Psi(z, \mathbb{R}) = \text{cl}(\Psi(z, \mathbb{R}))$ zyklisch ist. Wenn z mit $\Psi(z, \mathbb{R}) = \{z\}$ ein Fixpunkt ist, ist $\Psi(z, \mathbb{R})$ ja nicht eindimensional und keine Trajektorie.

Zyklizität und Quasizyklizität schliessen einander aus, wobei jede in einem Kompaktum beinhaltete Trajektorie wegen des Satzes von Heine-Borel zyklisch oder quasizyklisch ist. Im kompakten Zustandsraum ist es der Satz von Heine-Borel, welcher die Poincarésche Wiederkehr impliziert, die oft aus dem Liouville-Theorem abgeleitet wird, das in dem spezielleren Fall gilt, wenn eine Hamiltonische Vielteilchen-Interpretation gemäss (1.6) möglich ist. Daher, und weil ausserdem noch vor Newton der Gedanke des Determinismus im Raum natürlicher Topologisierung – selbstverständlich, ohne damals von natürlichen Topologien die Rede sein konnte – nennen wir jede Menge von Trajektorien $[\Psi]$ genau dann Heine-Descartesch, wenn sie den Bedingungen (1)-(3) der Einleitung genügt. Damit kann dann aber auch für jede homöomorphe Deformation eines Hamiltonischen Vielteilchen-Systemes dessen Poincarésche Wiederkehr gezeigt werden, weil dieses Wiederkehrverhalten eine topologische Invariante ist. Das Liouville-Theorem, welches dissipative Variabilität jeweiliger Lebesgue-positiver Zustandsraumteilmengen ausschliesst, veranlasst zu der Idee, die Dissipationsfreiheit in Form der Masserhaltung in verallgemeinerten Zustandsräumen zu generalisieren und die Masserhaltung zur Voraussetzung von Ergodensätzen zu machen, wie beispielsweise dem Birkhoffschen Ergodentheorem.

Dass die Periodizität und die Quasiperiodizität eines Zustandes $z \in \zeta$ für jede endlichdimensional-reelle Flussfunktion Ψ , deren Trajektorien $\Psi(z, \mathbb{R})$ glatt sind, einander ebenfalls ausschliessende Alternativen sind, ist offensichtlich. Daher gilt für stetige Flussfunktionen Ψ mit kompaktem Zustandsraum ζ : Die Quasiperiodizität bzw. die Periodizität eines Zustandes $z \in \zeta$ bezüglich Ψ und die Quasizyklizität bzw. die Zyklizität der Trajektorie $\Psi(z, \mathbb{R})$ sind

zueinander äquivalent.

Wir können in der einander ausschliessenden Alternativität der Quasizyklizität oder Zyklizität der Trajektorien kompakter Zustandsräume eine Vorform des Sachverhaltes sehen, den wir hier zeigen werden; des Sachverhaltes nämlich, dass die Determinismen, die durch stetige Flussfunktionen Ψ mit kompaktem Zustandsraum ζ beschrieben werden, so beschaffen sind, dass für jeden Zustand $z \in \zeta$ die Menge $\mathbf{cl}(\Psi(z, \mathbb{R}))$ entweder ein sensitiver Attraktor ist; oder aber die Menge $\mathbf{cl}(\Psi(z, \mathbb{R})) = \Psi(z, \mathbb{R})$ ist ein Zyklus oder sie beschreibt einen Fixpunkt. Daher behandeln wir hier vorzugsweise stetige Flussfunktionen mit kompaktem Zustandsraum. Und so bleibt es nicht aus, dass wir manchmal kurzerhand auch zyklische Trajektorien $\Psi(z, \mathbb{R})$ als periodische und quasizyklische Trajektorien $\Psi(z, \mathbb{R})$ als quasiperiodische Trajektorien bezeichnen.

Wenn wir für mit Hilfe von Flussfunktionen modellierte Formen des Determinismus eine geeignete Quasiergodenaussage formulieren und wir diese Aussage schliesslich zeigen können, dann wird auch das Quasiergodenproblem für Vielteilchensysteme beantwortet. Wir bemerken aber, dass hier eine wesentlich mathematische Frage erst einmal formuliert werden muss. Es ist wie bei einem Portrait: Diese Formulierung muss erst einmal getroffen werden.

Als eine mathematische Fassung des Quasiergodenproblem es können wir dabei nur eine Fragestellung anerkennen, die so beschaffen ist, dass ihre Beantwortung diejenigen Fragen mitbeantwortet, welche die Ergodik eines Vielteilchensystemes betreffen. Insofern sind wir zuallererst auf der Suche nach dem rein mathematischen Problem, dessen Lösung den Bedarf des Physikers im Hinblick auf die Ergodik eines Vielteilchensystemes deckt. Wir suchen eine mathematisch formulierte Frage.

Deren im Hinblick auf jene Ergodik bedarfsdeckende Beantwortung muss dabei aber nicht alle Fragen der statistischen Mechanik eines Vielteilchensystemes klären. Es könnte ja schliesslich auch so sein, dass die Beantwortung jener mathematisch formulierten Frage so ausfällt, dass die historische und unschärfer gefasste Quasiergodenhypothese als falsch anzusehen ist. Dann ergäben sich für den Physiker neue Aufgaben, die den Aufbau der statistischen Mechanik betreffen.

Wir verraten schon, was anders kaum zu erwarten ist. Die Quasiergodenhypothese ist im weiteren Sinn nicht als falsch anzusehen. Indess, im chaosfreien Szenario ist sie K.O. gemäss dem Trivialitätssatz 2.2.3: Diese Arbeit wird demonstrieren, dass Flussfunktionen Ψ , die Heine-Descartessche Kol-

lektivierungen $\{\Psi(z, \mathbb{R}) : z \in \zeta\}$ festlegen, durchaus chaotisch sein können. Sind sie aber nicht chaotisch, so bleibt insofern, als dann für jede Trajektorie $\tau \in \{\Psi(z, \mathbb{R}) : z \in \zeta\}$ deren Zyklizität im Sinn negierter Reichhaltigkeit

$$\mathbf{cl}(\tau) \setminus \tau = \emptyset$$

gilt, von der Quasiergodik nichts übrig, aber auch gar nichts.

Dies dramatisiert die skizzierten historischen Einwände gegen Boltzmanns Hypothese, die darauf basieren, dass es keine Homöomorphismen zwischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen gibt, vor denen gerade die Ehrenfestsche minimalinvasive Abwandlung der Boltzmannschen Ergodenhypothese zur Quasiergodenhypothese retten soll. Was dazu verführt, menschlicher Merkfähigkeit entgegenzukommen, und die Parole von dem „Ohne Chaos nichts los!“ zu prägen. Exakt jeder Homöomorphismus γ eines endlichdimensionalen reellen Zustandsraumes $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ auf denselben ist hüllenerhaltend in dem Sinn, dass für alle Zustandsraumteilmengen $Z \subset \zeta$

$$\gamma^{-1} \circ \mathbf{cl} \circ \gamma(Z) = Z \quad (1.8)$$

ist und die mengenwertige Abbildung

$$\gamma^{-1} \circ \mathbf{cl} \circ \gamma = \text{id}$$

insofern die Identität auf der Potenzmenge 2^ζ des Zustandsraumes ist; die Homöomorphie der Bijektion γ ist auf des letzteren natürliche Topologie $\mathbf{T}(n) \cap \zeta$ bezogen. Daraus ergibt sich unmittelbar die Partitivität des Mengensystemes

$$\{\mathbf{cl}(\Psi(z, \mathbb{R})) : z \in \zeta\} ,$$

das eine Partition des Zustandsraumes ζ ist, wenn die Bijektionen $\Psi^t := \Psi(\text{id}, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ Homöomorphismen sind. Von dieser Voraussetzung gehen wir hier aber offenbar nicht aus. Denn, dass Heine-Descartessche Kollektivierungen vorliegen, ist durch die Stetigkeit aller Flüsse Ψ^t für $t \in \mathbb{R}$ nicht impliziert, deren Definitionsmenge nicht beschränkt sein muss; und umgekehrt impliziert die Stetigkeit der Flüsse Ψ^t für alle $t \in \mathbb{R}$ auch nicht, dass $\{\Psi(z, \mathbb{R}) : z \in \zeta\}$ Heine-Descartesch ist. Denken wir an diejenige Partition Q_2 der abgeschlossenen, im Ursprung zentrierten Einheitskreisscheibe $\bigcup Q_2$, welche das Mengensystem der ebenfalls im Ursprung zentrierte Kreise des Radius $r \in [0, 1]$ ist. Der Kreis mit Radius null ist der Ursprung $\{0\} \neq \emptyset$.

Diese Partition Q_2 ist auf verschiedene Weise durch Flussfunktionen ξ_0 und ξ_1 in dem Sinn parametrisierbar, dass für beide Indizes $j \in \{0, 1\}$

$$Q_2 = \{\xi_j(z, \mathbb{R}) : z \in \bigcup Q_2\}$$

ist. Es gibt aber offenbar solche Flussfunktionen ξ_0 , für welche die Bijektionen $\xi_0^t = \xi_0(\text{id}, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ stetig sind und solche Flussfunktionen ξ_1 , für welche die Bijektionen $\xi_1^t = \xi_1(\text{id}, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ stetig sind. Wir erkennen hierbei, dass eine Flussfunktion Ψ , für welche die Implikation

$$t \in \mathbb{R} \Rightarrow (\Psi^t)^{-1} \circ \mathbf{cl} \circ \Psi^t = \text{id} \quad (1.9)$$

gilt, keinerlei Sensitivität auftreten kann. Sensitivität kann nur vorliegen, wenn die Existenzaussage

$$\exists t_* \in \mathbb{R} : (\Psi^{t_*})^{-1} \mathbf{cl} \Psi^{t_*} \neq \text{id} \quad (1.10)$$

zutrifft, die eine Differenz behauptet, welche den Bruch einer dynamischen Symmetrie formuliert. Gehen wir von dem gemäss (1.1)-(1.3) festgelegten Modell des Determinismus aus und nennen dabei die eindimensionalen glatten Mannigfaltigkeiten $\Psi(z, \mathbb{R})$ der Menge

$$[\Psi] := \{\Psi(z, \mathbb{R}) : z \in \zeta\} \quad (1.11)$$

Trajektorien und die Partition $[\Psi]$ eine trajektorielle Partition oder Kollektivierung der jeweiligen Flussfunktion! Wir nennen hier ferner exakt jede endlichdimensional-reelle Flussfunktion Ψ , deren Kollektivierung $[\Psi]$ so beschaffen ist, dass es eine Flussfunktion $\tilde{\Psi}$ in der nicht leeren Faser

$$[\text{id}]^{-1}(\{[\Psi]\}) = \left\{ \hat{\Psi} \in \left(\bigcup [\Psi] \right)^{(\bigcup [\Psi]) \times \mathbb{R}} : [\hat{\Psi}] = [\Psi] \right\} \neq \emptyset \quad (1.12)$$

gibt, eine insensitive Kollektivierung und jede Flussfunktion genau dann insensitive eichbar, wenn deren Kollektivierung insensitive ist; und konsequenterweise bezeichnen wir exakt jedes Element einer Faser der Form (1.12) als eine insensitive geeichte Flussfunktion.

Vielleicht gehen wir aber innerhalb dieses Rahmens zu weit, wenn wir schon hier mehr verraten, nämlich, dass sich durch den elementaren Quasiergodensatz das Gesamtbild der statistischen Mechanik verändert, obwohl wir uns aus Gründen thematischer Bindung zunächst strikt untersagen müssen, auf

diese Thematik einzugehen. Die Gültigkeit der Quasiergodenhypothese zeigt sich nämlich zuletzt in einer differenzierten Form, die neue Aufgaben an die Theorie der Vielteilchensysteme stellt: Im generischen Fall nämlich negiert der elementare Quasiergodensatz selbst bei auftretendem Chaos das quasiergodische Entwicklungsverhalten innerhalb der gesamten Energiehyperfläche! Das im Allgemeinen dem elementaren Quasiergodensatz nicht gemässe quasiergodische Entwicklungsverhalten, dass ein klassisches Vielteilchensystem innerhalb der gesamten Energiehyperfläche quasiergodisch sein soll, kann im klassischen Modell nur durch systemfremde, durch externe statistische Fluktuationen ohne resultierende Energieeinspeisung in das jeweilige System begründet werden, *durch apriorische Annahme systemischer Unabgeschlossenheit*; oder aber in einem quantentheoretischen oder in einem semiklassischen Modell dadurch, der Unschärferelation gemässe Fluktuationen geltend zu machen: Wenn die genauere Analyse ergäbe, dass klassische systemfremde, externe, statistische Fluktuationen anzusetzen, keine Erklärung für die im klassischen Rahmen empirisch glänzend bestätigte Boltzmannsche teilchenstatistische Phänomenologie liefert, die ja auf der Annahme der Quasiergodik innerhalb der gesamten Energiehyperfläche basiert, dann ist die Boltzmannsche Statistik wesentlich quantentheoretisch. In diesem Fall wäre die Boltzmannsche Statistik wesentlich quantentheoretisch, obwohl in ihr bekanntlich das Wirkungsquantum nicht explizit vorkommt.²

In unserem Traktat spielen bestimmte Partitionen eine grosse Rolle, eine Hauptrolle, nämlich als eben diese trajektorielle Partitionen. Wir benutzen

²Ludwig Boltzmann entdeckt die Quantentheorie also gegebenenfalles – je nachdem, wie die besagte Analyse ausfällt – zweimal beinahe explizit und zweimal implizit:

1. Mit der Bestimmung der Konstante des Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetzes, die mittels des Planckschen Strahlungsgesetzes auf das Wirkungsquantum zurückführbar ist, entdeckt Boltzmann implizit das Wirkungsquantum als Experimentator.

2. Dabei, die Quasiergodik innerhalb der gesamten Energiehyperfläche anzunehmen, die für seine empirisch bestätigte teilchenstatistische Phänomenologie notwendig ist, stösst Boltzmann auf die Notwendigkeit von Vakuumfluktuationen.

Die besagte genauere Analyse ist aber eine Untersuchung jenseits unseres Rahmens.

als Notationskonvention,³ dass

$$\mathbf{part}(A) := \left\{ Q \subset 2^A : \bigcup Q = A \wedge \right. \\ \left. q_1, q_2 \in Q \Rightarrow q_1 \cap q_2 \in \{\emptyset, q_1\} \right\} \quad (1.13)$$

die Menge aller Partitionen einer Menge A notiere. Da eine Partition einer Menge ein Mengensystem, d.h., eine Menge von Mengen ist, ist $\mathbf{part}(A)$ ein Mengensystem, dessen Elemente allesamt Mengensysteme sind. Es gilt also

$$\alpha \in \mathbf{part}(A) \Rightarrow \alpha \setminus \{\emptyset\} \in \mathbf{part}(A) \wedge \alpha \cup \{\emptyset\} \in \mathbf{part}(A) ,$$

sofern $A \neq \emptyset$ ist. Denn es ist

$$\mathbf{part}(\emptyset) = \left\{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \right\} .$$

Dieses Traktat ist an der Grenze, nicht der des Autors. Es behandelt den Determinismus nämlich mit den Methoden der Analysis, die in die der mengentheoretischen Topologie übergehen. Bereits in diesem Traktat spielen daher zwar Topologien eine durchaus grosse Rolle und zwar die natürlichen, diejenigen, deren Basis euklidische Kugeln endlichdimensionaler und reeller Räume sind. Die Mengensysteme, die Topologien sind, teilen sich hier noch nicht die beiden Hauptrollen mit den Partitionen, mit denen erstere sich aber die beiden Hauptrollen in der abstrakten Lehre des Determinismus teilen, einer Theorie, die der Dialog der beiden Typen von Mengensystemen ist. Daher erwähnen dies wir schon hier: Zu jeder Partition $\alpha \in \mathbf{part}(A)$ gibt es das Mengensystem α^\cup , wenn wir für jedes Mengensystem β

$$\beta^\cup := \left\{ \bigcup a : a \subset \beta \right\} \quad (1.14)$$

setzten, das, gleich, ob $\emptyset \in \beta$ oder ob $\emptyset \notin \beta$, allemal die leere Menge als Element hat, da $\emptyset \subset \beta$ und $\bigcup \emptyset = \emptyset$ ist. Im Allgemeinen ist β^\cup zwar wie eine Topologie abgeschlossen gegen jedwede Vereinigung $\bigcup b$ einer Teilmenge $b \subset \beta$ und es ist ausserdem $\emptyset \in \beta$. Im Allgemeinen ist dennoch β^\cup offenbar keine

³Die wenigen speziellen, nicht allgemein verfestigten oder die weniger geläufigen Schreibweisen, die wir in dieser Abhandlung verwenden, sind an deren Schluss in einem Symbolverzeichnis aufgelistet. Ferner sind diese weniger geläufigen Schreibweisen im fortlaufenden Text eingeführt und die Stellen, an denen dies geschieht, sind im Index unter dem Stichwort „Notationskonvention“ vermerkt.

Topologie, wohingegen α^\cup für jede Partition $\alpha \in \mathbf{part}(A)$ eine Topologie ist, falls $A \neq \emptyset$ ist. Denn das Mengensystem α^\cup ist abgeschlossen gegen Schnitte endlich vieler seiner Elemente, wobei $\bigcup \alpha^\cup \neq \emptyset$ ist. Deswegen nennen wir exakt α^\cup für jede Partition $\alpha \in \mathbf{part}(A)$ für $A \neq \emptyset$ die von der Partition α generierte Topologie und bezeichnen jede Topologie \mathbf{T} genau dann als partitionsgeneriert, wenn es eine Partition $\vartheta \in \mathbf{part}(\bigcup \mathbf{T})$ gibt, für die

$$\vartheta^\cup = \mathbf{T}$$

ist. Das Verhältnis einer trajektoriellen Partition zu einer Flussfunktion Ψ , die diese Partition gemäss (1.11) festlegt, drücken wir dadurch aus, dass wir sagen, dass $[\Psi]$ die Kollektivierung oder das Trajektorienkollektiv der Flussfunktion Ψ ist. Und wir nennen dabei exakt jede stetige bzw. stückweise differenzierbare bzw. differenzierbare Funktion Ψ , für die (1.1)-(1.3) gilt, eine \mathcal{C}^0 - bzw. $\mathcal{C}^{1/2}$ - bzw. \mathcal{C}^1 -Flussfunktion. Und entsprechend nennen wir genau dann das Mengensystem $[\Psi]$ eine trajektorielle \mathcal{C}^0 - bzw. $\mathcal{C}^{1/2}$ - bzw. \mathcal{C}^1 -Partition.

1.1.2 Minimale invariante Mannigfaltigkeiten und die Relativierung der Homöomorphie

Für jede Flussfunktion, gleich welche Kontinuität sie hat, sind Invariante als deren Invariante konzipierbar. Wir verstehen unter einer Invariante jeder trajektoriellen Partition $[\Psi]$ gemäss (1.11) eine besondere Abbildung, die auf dem Zustandsraum $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist und deren Werte reelle Zahlen sind: Die Besonderheit einer Invariante einer trajektoriellen Partition ist es, dass sie auf jeweils jeder Trajektorie τ der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ konstant ist. Die Invarianten der jeweiligen trajektoriellen Partition $[\Psi]$ sind also die Elemente der Menge von Funktionen

$$\text{Inv}^*([\Psi]) := \left\{ J \in \mathbb{R}^\zeta : x \in \tau \in [\Psi] \Rightarrow J(\tau) = \{J(x)\} \right\} . \quad (1.15)$$

Diese Menge umfasst die Menge $\bigcup \{\{c\}^\zeta : c \in \mathbb{R}\}$, die Menge aller Funktionen, die undifferenziert auf dem ganzen Zustandsraum ζ konstant sind und exakt welche wir als triviale Invariante bezeichnen. Mit der Menge der Funktionen

$$\text{Inv}([\Psi]) := \text{Inv}^*([\Psi]) \setminus \bigcup \{\{c\}^\zeta : c \in \mathbb{R}\} \quad (1.16)$$

sind daher alle nichttriviale Invariante notiert. Für alle halb-oder ganzzahligen Indizes $j \in \{0, 1/2, 1\}$ und für alle trajektoriellen Partitionen $[\Psi]$ sei mit

$$\text{Inv}^j([\Psi]) := \text{Inv}([\Psi]) \cap \{f|_{\zeta} : f \in \mathcal{C}^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\} \quad (1.17)$$

die Menge aller nichttrivialer Invarianten der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ notiert, die die Kontinuität $j \in \{0, 1/2, 1\}$ haben: Denn dabei sei $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Menge aller stetiger, auf dem \mathbb{R}^n definierter Funktionen, deren Werte reelle Zahlen sind und $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sei die in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ enthaltene Menge der differenzierbaren reellen Funktionen, die auch in der Menge $\mathcal{C}^{1/2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ aller Lipschitz-stetiger reeller Funktionen liegt. Wie zumeist in der Literatur bezeichne dabei $g|A$ auch in dieser Abhandlung für jede Funktion g und jede Menge A die Restriktion der Funktion g auf die Menge A . $g|A$ ist demnach die leere Menge, wenn die Menge A und die Definitionsmenge der Funktion g disjunkt sind. Halbzahlige Indizes $q \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, \dots\}$ nennen wir Kontinuitätsindizes, wenn sie die Kontinuität von Funktionen kennzeichnen, die wir dabei als von \mathcal{C}^q -Kontinuität bezeichnen. Der Kontinuitätsindex $-1/2$ kennzeichnet stückweise Stetigkeit; und selbst die stückweise Stetigkeit muss für eine Funktion der Kontinuität \mathcal{C}^{-1} nicht gegeben sein.

Wie ist es möglich, dass wir hier frei von der \mathcal{C}^q -Kontinuität von Abbildungen ϕ für einen jeweiligen Kontinuitätsindex q reden, frei, d.h., ohne dabei die Referenz auszusprechen, auf welche jeweils zugrundegelegte Topologisierung $\mathbf{T}(\mathbf{P}_1\phi)$ bzw. $\mathbf{T}(\mathbf{P}_2\phi)$ der jeweiligen Definitionsmenge $\mathbf{P}_1\phi$ bzw. Wertemenge $\mathbf{P}_2\phi$ wir uns beziehen? Dies ist deshalb möglich, weil wir vereinbaren, dass dann, wenn wir diese Referenz nicht ausdrücklich angeben, die Topologisierungen

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(n(\mathbf{P}_1\phi)) \cap \mathbf{P}_1\phi &= \mathbf{T}(\mathbf{P}_1\phi) , \\ \mathbf{T}(n(\mathbf{P}_2\phi)) \cap \mathbf{P}_1\phi &= \mathbf{T}(\mathbf{P}_2\phi) \end{aligned} \quad (1.18)$$

stillschweigend angenommen seien,⁴ falls ϕ eine Abbildung ist, deren Definitionsmenge $\mathbf{P}_1\phi$ im $\mathbb{R}^{n(\mathbf{P}_1\phi)}$ und deren Wertemenge $\mathbf{P}_2\phi$ im $\mathbb{R}^{n(\mathbf{P}_2\phi)}$ liegt, wobei $n(\mathbf{P}_1\phi)$ und $n(\mathbf{P}_2\phi)$ natürliche Zahlen seien und wobei $\mathbf{T}(n(\mathbf{P}_1\phi))$ bzw. $\mathbf{T}(n(\mathbf{P}_2\phi))$ die natürlichen Topologien des $\mathbb{R}^{n(\mathbf{P}_1\phi)}$ bzw. des $\mathbb{R}^{n(\mathbf{P}_2\phi)}$ seien. Für jede Funktion ϕ wollen wir hier fürderhin mit $\mathbf{P}_1\phi$ deren Definitionsmenge und mit $\mathbf{P}_2\phi$ deren Wertemenge bezeichnen. Denn für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und für jedes n -Tupel $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – gleich, welcher Art dessen jeweilige Komponenten sein mögen – sei für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\mathbf{P}_j a = a_j . \quad (1.19)$$

Da jede Funktion ϕ eine Menge von Paaren ist, ist \mathbf{P}_1 in dem Ausdruck $\mathbf{P}_1\phi$ als mengenweise angewandter Operator verstanden, sodass $\mathbf{P}_1\phi$ die Menge aller ersten Komponenten der Menge von Paaren ϕ , mithin die Definitionsmenge von ϕ ist. Die Angabe der Referenztopologisierung kann daher zwar im Allgemeinen nicht unterbleiben, hier in diesem Traktat in der Regel allerdings schon, weil wir in demselben in der Regel von Abbildungen reden, die Teilmengen endlichdimensionaler reeller Räume auf ebensolche abbilden. Im Allgemeinen jedoch bezeichne für je zwei Topologien \mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2 und zwei Mengen $A_1 \subset \bigcup \mathbf{T}_1$ und $A_2 \subset \bigcup \mathbf{T}_2$ der zugehörigen topologischen Räume $(\bigcup \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1)$ und $(\bigcup \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2)$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2}(A_1, A_2) := \left\{ f \in A_1^{A_2} : \right. \\ \left. U \in \mathbf{T}_2 \cap A_2 \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathbf{T}_1 \cap A_1 \right\} , \end{aligned} \quad (1.20)$$

⁴Wir sind darauf bedacht, zwischen den Werten $f^{-1}(a) \in X$ der Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion $f \in Y^X$ und den Urbildmengen

$$f^{-1}(A) := \{x \in \mathbf{P}_1 f : f(x) \in A\} \subset X ,$$

die für beliebige Funktionen $f \in Y^X$ und für beliebige Mengen A definiert seien, zu unterscheiden. Die Werte $f^{-1}(a) \in X$ der Umkehrfunktion f^{-1} sind nur für Wertemengenelemente $a \in \mathbf{P}_2 f \subset Y$ definiert. Wenn $b \in Y \setminus \mathbf{P}_2 f$ zwar ein Element der Menge Y ist, in die die Funktion $f \in Y^X$ abbildet, b jedoch kein Element der Wertemenge $\mathbf{P}_2 f$ ist, so ist $f^{-1}(b)$ nicht definiert. Die Urbildmenge $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ ist allerdings sehr wohl definiert. Insbesondere die Urbildmengen einelementiger Mengen $\{a\} \subset \mathbf{P}_2 f$ der jeweiligen Wertemenge

$$f^{-1}(\{a\}) = \{f^{-1}(a)\} \neq f^{-1}(a)$$

und die Werte der Umkehrfunktion $f^{-1}(a)$ wollen wir auseinanderhalten.

die Menge der bezüglich der Topologien \mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2 stetigen Abbildungen der Menge A_1 auf die Menge A_2 . Wobei für jede Topologie \mathbf{T} und jede Menge A

$$\mathbf{T} \cap A := \{U \cap A : U \in \mathbf{T}\}$$

das Mengensystem aller Schnitte einer offenen Menge der Topologie \mathbf{T} mit der Menge A bezeichnet. In der Allgemeinheit beliebiger Topologien brauchen wir in dieser Abhandlung keine höheren Kontinuitäten als die der Stetigkeit. Enthält ζ keine offene Menge, ⁵ so sind die Mengen $\text{Inv}([\Psi])$ und $\text{Inv}^j([\Psi])$ für alle Kontinuitätsindizes $j \in \{-1, -1/2, 0, \dots\}$ gleich, andernfalls differieren die Mengen $\text{Inv}^{j(1)}([\Psi])$ und $\text{Inv}^{j(2)}([\Psi])$, falls die Kontinuitätsindizes $j(1), j(2) \in \{-1, -1/2, 0, \dots\}$ verschieden sind und – falls die Kontinuität der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ hinreichend hoch ist. Was aber gibt uns ein Kriterium dafür, dass die Kontinuität der jeweiligen trajektoriellen Partition $[\Psi]$ „hinreichend hoch“ ist?

Wir können die beschriebene Auffassung der Invarianten einer trajektoriellen Partition $[\Psi]$ topologisch phrasieren: Das Mengensystem

$$\{\phi^{-1}(\{a\}) : a \in \mathbf{P}_2\phi\} \in \mathbf{part}(\mathbf{P}_1\phi)$$

ist das Niveauliniensystem der Funktion ϕ und offenbar eine Partition deren Definitionsmenge, sodass

$$\{\phi^{-1}(\{a\}) : a \in \mathbf{P}_2\phi\}^{\cup}$$

gemäss der Ausführungen bei (1.13) und (1.14) eine partitionsgenerierte Topologie ist, exakt welche wir die Niveaulinientopologie der Funktion ϕ nennen. Betrachten wir speziell eine Funktion f , deren Definitionsmenge $\mathbf{P}_2f = \zeta$ der Zustandsraum ζ einer trajektoriellen Partition $[\Psi]$ ist und deren Wertemenge $\mathbf{P}_2f \subset \mathbb{R}$ auf dem Zahlenstrahl \mathbb{R} liegt: Genau dann, wenn die Niveaulinientopologie der Funktion f so beschaffen ist, dass die

⁵Können wir sagen, dass der jeweilige Zustandsraum $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ die Kontinuitäten Invarianten einer trajektoriellen Partition $[\Psi]$ *im Allgemeinen* unterscheide? Dazu müssten wir doch eigentlich auf der Potenzmenge des \mathbb{R}^n eine Sigma-Algebra von Mengensystemen $\sigma(n)$ von Teilmengen des \mathbb{R}^n einrichten; $\sigma(n)$ sollte das Mengensystem X_n aller Teilmengen des \mathbb{R}^n , die eine offene Menge $U \in \mathbf{T}(n)$ enthalten, als Element haben, wobei $\mathbf{T}(n)$ die natürliche Topologie des \mathbb{R}^n ist; wir müssten diese Sigma-Algebra $\sigma(n)$ mit einem Wahrscheinlichkeitsmass p_n bewerten. Wenn dann $p_n(X_n) = 1$ ist, können wir sagen, dass der jeweilige Zustandsraum ζ die Kontinuitäten Invarianten trajektorieller Partitionen $[\Psi]$, die von \mathcal{C}^∞ -Kontinuität sind, p_n -fast immer unterscheide.

Niveaulinientopologie $\{f^{-1}(\{a\}) : a \in \mathbf{P}_2 f\}^\cup$ der Funktion f größer ist, als die von der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ generierte Topologie $[\Psi]^\cup$, so ist f eine Invariante der trajektoriellen Partition $[\Psi]$. Die Niveaulinientopologie $\{f^{-1}(\{a\}) : a \in \mathbf{P}_2 f\}^\cup$ der Funktion f gilt dabei genau dann als größer als die von der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ generierte Topologie $[\Psi]^\cup$, wenn die Implikation

$$a \in \{f^{-1}(\{a\}) : a \in \mathbf{P}_2 f\}^\cup \Rightarrow a \in [\Psi]^\cup \quad (1.21)$$

wahr ist. Der Satz über implizite Funktionen sagt uns dabei, dass die Kontinuität der Funktion f die ihrer Niveaulinien, d.h., der Elemente ihres Niveauliniensystemes ist. Daher können wir die letztgestellte Frage nach einem Kriterium dafür, dass die Kontinuität der jeweiligen trajektoriellen Partition $[\Psi]$ dafür hinreichend hoch ist, dass für $j(1) \neq j(2)$ die Verschiedenheit

$$\text{Inv}^{j(1)}([\Psi]) \neq \text{Inv}^{j(2)}([\Psi]) \quad (1.22)$$

gilt, so beantworten: Falls die trajektorielle Partition $[\Psi]$ nicht nirgends mindestens von der Kontinuität $\max\{j(1), j(2)\}$ ist, d.h., falls es eine offene Menge U des Zustandsraumes ζ gibt, für die gilt, dass alle Elemente des Spurmengensystemes

$$[\Psi] \cap U = \{\tau \cap U : \tau \in [\Psi]\}$$

Trajektorienabschnitte der Kontinuität $\mathcal{C}^{\max\{j(1), j(2)\}}$ sind, so gilt die Verschiedenheit (1.22). Wir wollen nicht darüber streiten, ob Phrasierungen Perspektiven öffnen können.

Allemaal ist $\text{Inv}^{1/2}([\Psi])$ die Menge stückweise differenzierbarer und dabei stetiger Invarianten der trajektoriellen Partition $[\Psi]$, die keine triviale Invariante sind und $\text{Inv}^0([\Psi])$ ist die Menge stetiger Invarianten der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ und $\text{Inv}^1([\Psi])$ ist die Menge stetig differenzierbarer Invarianten derselben, die keine triviale Invariante sind.

Nun wollen wir uns einen einfachen, jedoch sehr wichtigen Sachverhalt klar machen, der die Quasiergodik einer trajektoriellen Partition betrifft, dessen Invariante wir nun treffend formuliert haben: Welche im Hinblick auf die Quasiergodik relevanten Gegebenheiten finden wir in dem Fall vor, dass eine nicht leere Menge nichttrivialer stetiger Invarianten einer trajektoriellen Partition existiert?

Es sei $J \in \text{Inv}^0([\Psi]) \neq \emptyset$ eine stetige Invariante der trajektoriellen Partition $[\Psi]$. Für alle Werte $\omega_1, \omega_2 \in J(\mathbb{R})$ dieser stetigen Invariante J ist die

Mannigfaltigkeit

$$J^{-1}(\{\omega_1\}) = \left\{ x \in \zeta : J(x) = \omega_1 \right\} \quad (1.23)$$

eine abgeschlossene Menge. Offensichtlich ist die Äquivalenz

$$J^{-1}(\{\omega_1\}) \cap J^{-1}(\{\omega_2\}) = \emptyset \Leftrightarrow \omega_1 \neq \omega_2 \quad (1.24)$$

wahr. Überdies gilt für die stetige nichttriviale Invariante J , dass für alle ihre Werte

$$\omega_1 \in J(\mathbb{R}), \omega_2 \in J(\mathbb{R}) \setminus \{\omega_1\} \neq \emptyset$$

eine positive Zahl $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, für die die Disjunktionsbehauptung

$$(J^{-1}(\{\omega_2\}) + \mathbb{B}_\delta(0)) \cap (J^{-1}(\{\omega_2\}) + \mathbb{B}_\delta(0)) = \emptyset \quad (1.25)$$

wahr ist. Es ist also offensichtlich ausgeschlossen, dass eine in der Punktmenge $J^{-1}(\{\omega_1\})$ des Zustandsraumes ζ enthaltene Trajektorie keinem Punkt $x \in J^{-1}(\{\omega_2\})$ beliebig nahe liegt, wenn $\omega_1 \neq \omega_2$ ist. Dass ein Zustand $x \in J^{-1}(\{\omega_2\})$ einer Trajektorie θ aus dem Spurmengensystem

$$\begin{aligned} [\Psi] \cap J^{-1}(\{\omega_2\}) &:= \left\{ \tau \cap J^{-1}(\{\omega_2\}) : \tau \in [\Psi] \right\} \\ &= \left\{ \tau \in [\Psi] : \tau \subset J^{-1}(\{\omega_2\}) \right\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

beliebig nahe liegt, heisst dabei gerade, dass x nicht in der abgeschlossenen Hülle $\mathbf{cl}(\theta)$ der Trajektorie θ liegt und dass der Zustand $x \in J^{-1}(\{\omega_2\})$ von der abgeschlossenen Hülle $\mathbf{cl}(\theta)$ bezüglich der natürlichen Topologie des Zustandsraumes separiert ist. Daher gilt auch die Implikation

$$\begin{aligned} \omega_1 \in J(\mathbb{R}) \wedge \omega_2 \in J(\mathbb{R}) \setminus \{\omega_1\} \wedge x \in J^{-1}(\{\omega_1\}) \\ \Rightarrow \\ x \notin \mathbf{cl}(J^{-1}(\{\omega_1\})) . \end{aligned} \quad (1.26)$$

Es ist also von vorne herein klar, dass Quasiergodik nur innerhalb der Urbilder stetiger Invarianter einer trajektoriellen Partition vorliegen kann, weil solche Urbilder abgeschlossen sind und weil diese Urbilder im Zustandsraum separiert sind.

Urbilder stetiger Invarianter einer trajektoriellen Partition spielen also eine entscheidende Rolle bei der formalen Fassung der Quasiergodenhypothese,

weswegen wir uns dieselben anschauen wollen:

Ein nicht leeres Urbild $J^{-1}(\{\omega\})$ für $J \in \text{Inv}^p([\Psi])$ nennen wir genau dann eine invariante Mannigfaltigkeit der Invariante $J \in \text{Inv}^p([\Psi])$, wenn $p \in \{1/2, 1\}$ ist. Sei nun für $j \in \mathbb{N}$ und für einen halb-oder ganzzahligen Index $q \in \{1/2, 1\}$

$$\beta := (\beta_k)_{1 \leq k \leq j} \in (\text{Inv}^q([\Psi]))^j \quad (1.27)$$

ein j -Tupel Invarianter der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ mit \mathcal{C}^q -Kontinuität. Dabei seien erstens dieses Tupels Komponenten so beschaffen, dass $\{\beta_1, \dots, \beta_j\}$ unabhängige Invariante sind, dass es also für alle $k \in \{1, \dots, j\}$ keine \mathcal{C}^q -Funktion $g_k \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R}^{j-1}, \zeta)$ von der Art gibt, dass

$$\beta_k = g_k(\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \dots, \beta_j) \quad (1.28)$$

ist; dennoch gebe es ein Tupel $\omega = (\omega_k)_{1 \leq k \leq j} \in \mathbb{R}^j$, für das der Schnitt

$$\beta^{-1}(\{\omega\}) := \bigcap \left\{ \beta_k^{-1}(\omega_k) : k \in \{1, \dots, j\} \right\} \neq \emptyset \quad (1.29)$$

nicht leer ist. Die Bedingung (1.29) ist eine Kohärenzbedingung an die unabhängige Menge \mathcal{C}^q -Invarianten $\{\beta_1, \dots, \beta_j\}$, die deren Unabhängigkeit entgegen.

Es sei für jede trajektorielle Partition und für jeden Kontinuitätsindex $q \in \{1/2, 1\}$ mit $\text{Ui}^q([\Psi])$ die folgende Hilfskonstruktion bezeichnet: $\text{Ui}^q([\Psi])$ sei die Menge aller j -Tupel β für ein $j \in \mathbb{N}$, die gemäss (1.27) beschaffen sind und die dabei die Menge aller jeweiligen Komponenten $\{\beta_1, \dots, \beta_j\}$ haben, die eine Menge unabhängiger \mathcal{C}^q -Invarianten der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ ist, wobei es ein Tupel $\omega = (\omega_k)_{1 \leq k \leq j} \in \mathbb{R}^j$ gebe, für das der Schnitt $\beta^{-1}(\{\omega\})$ gemäss (1.29) nicht leer ist. Genau dann, wenn für $\beta \in \text{Ui}^q([\Psi])$ die Implikation

$$\begin{aligned} \beta_{j+1} \in \text{Inv}^q([\Psi]) &\Rightarrow \\ \beta \oplus \beta_{j+1} = (\beta_1, \dots, \beta_j, \beta_{j+1}) &\notin \text{Ui}^q([\Psi]) \end{aligned} \quad (1.30)$$

wahr ist, nennen wir das Tupel Invarianten $\beta \in \text{Ui}^q([\Psi])$ maximal. Mit \oplus notieren wir dabei hier die Kokatenation und $\overline{\text{Ui}}^q([\Psi])$ bezeichne nun für jede trajektorielle Partition $[\Psi]$ und für jeden der beiden halb-oder ganzzahligen Kontinuitätsindizes $q \in \{1/2, 1\}$ die Menge aller maximalen Tupel der Menge $\text{Ui}^q([\Psi])$. Genau dann, wenn $\beta \in \overline{\text{Ui}}^q([\Psi])$ ein maximales Tupel ist und es ein Element $\omega = (\omega_k)_{1 \leq k \leq j}$ in der Wertemenge $\beta(\zeta)$ gibt, für das der (1.29)

gemässe Schnitt $\beta^{-1}(\{\omega\})$ nicht leer ist, nennen wir denselben, d.h., den Schnitt

$$\beta^{-1}(\{\omega\}) := \bigcap \left\{ \beta_k^{-1}(\omega_k) : k \in \{1, \dots, j\} \right\}, \quad (1.31)$$

eine minimale invariante \mathcal{C}^q -Mannigfaltigkeit der trajektoriellen Partition $[\Psi]$. Wir klassifizieren minimale invariante Mannigfaltigkeiten analog zur Klassifikation invarianter Mannigfaltigkeiten nach ihrer Kontinuität: Ist $q = 1/2$, so ist $\beta^{-1}(\{\omega\})$ eine stückweise differenzierbare minimale invariante Mannigfaltigkeit und für $q = 1$ ist sie eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für die beiden Kontinuitätsindizes $q \in \{1/2, 1\}$ sei die Menge all solcher minimaler invarianter \mathcal{C}^q -Mannigfaltigkeiten einer jeweiligen trajektoriellen Partition fürderhin notiert mit $\mathcal{M}^q([\Psi])$.

Wenn wir die minimalen invarianten \mathcal{C}^1 -Mannigfaltigkeiten bestimmen wollen, so brauchen wir nur alle Lösungen $\beta_j \in \mathcal{C}^1(\zeta, \mathbb{R})$ zu bestimmen, die für alle $x \in \zeta$ der Gleichung

$$\partial_2 \Psi(x, 0)^\top \nabla \beta_j(x) = 0 \quad (1.32)$$

genügen, die wir die Invariantengleichung der jeweiligen Flussfunktion Ψ nennen. Auf den ersten Blick meinen wir, dass, wenn $\partial_2 \Psi(x, 0) \neq 0$ ist und n die Dimension desjenigen \mathbb{R}^n , der den jeweiligen Zustandsraum ζ enthält, $n - 1$ unabhängige Richtungen existieren, die alle die Richtungen der Gradienten $\nabla \beta_j(x)$ sein können, sodass es $n - 1$ unabhängige Lösungen $\beta_j \in \mathcal{C}^1(\zeta, \mathbb{R})$ gibt.

Was aber, wenn die Trajektorie $\Psi(x, \mathbb{R})$ der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ so verläuft, dass sie nicht nur durch x , sondern beliebig nahe an x vorbei läuft? – Was die Redeweise dafür ist, dass die Trajektorie $\Psi(x, \mathbb{R})$ durch jede hinreichend kleine Umgebung U von x nicht nur durch x verläuft, sondern zusammenhängende Trajektorienausschnitte $\theta \subset \Psi(x, \mathbb{R}) \cap U$ mit $\theta \not\ni x$ existieren. Und zwar unendlich viele, die in x dicht liegen:

Wir können uns dann gut vorstellen, dass diese Trajektorienausschnitte $\theta \subset \Psi(x, \mathbb{R}) \cap U$ in der Umgebung U eine \mathcal{C}^1 -Fläche oder eine \mathcal{C}^1 -Hyperfläche $F_\Psi(x)$ der Dimension $\nu \geq 2$ quasi aufspannen, in der x liegt und deren Einheitstangenten in $x_1, x_2, \dots \in U$

$$\partial_2 \Psi(x_1, \mathbb{R}) / \|\partial_2 \Psi(x_1, \mathbb{R})\|, \partial_2 \Psi(x_2, \mathbb{R}) / \|\partial_2 \Psi(x_2, \mathbb{R})\|, \dots$$

sind. Dann müssen die Gradienten $\nabla \beta_j(x)$ der besagten \mathcal{C}^1 -Invarianten $\beta_j \in \mathcal{C}^1(\zeta, \mathbb{R})$ alle im Normalraum der \mathcal{C}^1 -Hyperfläche $F_\Psi(x)$ an der Stelle x liegen. Da letztere die Dimension ν hat, kann es höchstens $n - \nu$ unabhängige

Lösungen $\beta_j \in \mathcal{C}^1(\zeta, \mathbb{R})$ geben. Diese suggestive Überlegung führt uns vor Augen, dass die minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten nicht die Trajektorien selbst sein müssen. Wir verweisen auf den Satz **A.1** des Anhanges. Und wir weisen auf das Problem der Bestimmung konkreter minimaler invarianter Mannigfaltigkeiten hin, das leider nicht lediglich die Aufgabe ist, eine partielle Differenzialgleichung zu lösen. Schon eine Differenzialgleichung zu lösen, kann uns mit Unannehmlichkeiten konfrontieren. Insofern als die Handhabung dieser Unannehmlichkeiten ein klassischer Problemkreis der mathematischen Physik ist, der sich zu einem Schwerpunkt der Numerik vergewärtigte, ragt die Frage der Behandlung der Invariantengleichung (1.32) von anderen Arbeitsgebieten in dieses Traktat. Wir nehmen an, dass uns ein Orakel an die Hand gegeben ist, das uns zu einer vorgelegten \mathcal{C}^1 -Flussfunktion Ψ die Menge aller stückweise differenzierbarer Lösungen $\beta_j \in \mathcal{C}^{1/2}(\zeta, \mathbb{R})$ der Invariantengleichung (1.32) dieser jeweiligen Flussfunktion Ψ sagt, das uns also die Menge

$$\begin{aligned} \text{Inv}^q([\Psi]) = \Big\{ \lambda \in \mathcal{C}^q(\mathbf{P}_2\Psi, \mathbb{R}) : \\ x \in \mathbf{P}_2\Psi \Rightarrow \partial_2\Psi(x, 0)^\top \nabla\lambda(x) = 0 \Big\} \end{aligned} \quad (1.33)$$

für beide Kontinuitätsindizes $q \in \{1/2, 1\}$ angibt. Dann sollte es uns doch möglich sein, minimale invariante \mathcal{C}^q -Mannigfaltigkeiten zu bestimmen. Denn für jedes Mengensystem X sind die Mengensysteme

$$\begin{aligned} X[1] &:= \{\Lambda \subset X : \bigcap \Lambda \neq \emptyset\} , \\ X[2] &:= \{\bigcap \Lambda : \Lambda \in X[1]\} , \\ X[3] &:= \{\Gamma \in X[2] : \Theta \in X[2] \wedge \Theta \supset \Gamma \Rightarrow \Gamma = \Theta\} \end{aligned} \quad (1.34)$$

wohldefiniert. Deren Konstruktion kommt von dem Mengensystem X über den ersten Auswahlschritt aller Teilmengensysteme mit nicht leerem Schnitt und über den anschliessenden Auswahlschritt der kleinsten aller dieser jeweiligen nicht leeren Schnitte zu dem Mengensystem $X[3]$. Mit $\text{Inv}^q([\Psi])$ ist uns für beide Kontinuitätsindizes $q \in \{1/2, 1\}$ auch das Mengensystem

$$\left\{ \lambda^{-1}(\omega) : (\lambda, \omega) \in \text{Inv}^q([\Psi]) \times \mathbb{R} \right\} \quad (1.35)$$

zur Hand, die die leere Menge als Element hat, wenn es eine Invariante $\lambda \in \text{Inv}^q([\Psi])$ gibt, für die $\mathbf{P}_2\lambda \neq \mathbb{R}$ ist, was aber für die Konstruktion des Mengensystemes

$$\left\{ \lambda^{-1}(\omega) : (\lambda, \omega) \in \text{Inv}^q([\Psi]) \times \mathbb{R} \right\}[3] = \mathcal{M}^q([\Psi]) \quad (1.36)$$

gemäss (1.34) ohne Relevanz ist. Die Konstruktion des Mengensystemes $X[3]$ zu dem Mengensystem X ist offenbar nur in dem Fall, dass X eine endliche Menge endlicher Mengen ist, programmierbar. Dann ist X ein Äquivalent einer endlichen Menge X endlicher Mengen der Potenzmenge $2^{\mathbb{N}}$, die eine Matrix aus der Menge

$$\{0, 1\}^{\mathbf{card}(X) \times \max \bigcup X}$$

mit $\mathbf{card}(X) \max \bigcup X$ bits zu kodieren vermag. Wir sehen: Die Konstruktion des Mengensystemes minimaler nicht leerer Schnitte $X[3]$, das eine Matrix aus der Menge

$$\{0, 1\}^{\mathbf{card}(X[3]) \times \max \bigcup X}$$

kodiert, ist möglich. Dabei ist schon in diesem finiten und programmierbaren Fall offenbar ein **NP**-Problem gegeben, weil $2^{\mathbf{card}(X)}$ Schnitte von Mengen aus X gebildet und überprüft werden müssen. Aber die Repräsentierbarkeit des kontinuumsmächtigen Mengensystemes kontinuumsmächtiger Mengen (1.35) durch eine endliche Menge endlicher Mengen wird durch das mögliche beschriebene Phänomen, dass eine durch einen Zustand x verlaufende Trajektorie beliebig nahe an demselben vorbei verläuft, kritisch. Wir sehen: Die Bestimmung minimaler invarianter Mannigfaltigkeiten ist mit der Lösung der Invariantengleichung (1.32) noch nicht im Wesentlichen bereits getan.

Wir bemerken, dass die Menge aller eine minimale invariante Mannigfaltigkeit $m \in \mathcal{M}^q([\Psi])$ schneidenden Trajektorien der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ die stückweise stetige minimale invariante Mannigfaltigkeit m partitioniert: Es ist

$$[\Psi]_m := \left\{ \tau \in [\Psi] : \tau \cap m \neq \emptyset \right\} \in \mathbf{part}(m), \quad (1.37)$$

wobei für jedes Mengensystem W und $w \subset \bigcup W$

$$W_w := \{v \in W : v \cap w \neq \emptyset\} \quad (1.38)$$

die W -Auswahl durch w sei. Es gilt darüber hinaus auch die Implikation

$$m \in \mathcal{M}^0([\Psi]) \Rightarrow \left\{ \mathbf{cl}(\tau) : \tau \in [\Psi] \right\}_m \in \mathbf{part}(m). \quad (1.39)$$

Offensichtlich existieren trajektorielle Partitionen, deren minimale invariante Mannigfaltigkeiten unbeschränkt sind. Für diese unbeschränkten trajektoriellen Partitionen kann der Fall vorliegen, dass nur triviale Quasiergodik gegeben ist: Beispielsweise ist jedes diffeomorphe Bild der trivialen trajektoriellen Partition $(\mathbb{R}^2, \{(c, \mathbb{R}) : c \in \mathbb{R}\})$ eine trajektorielle Partition, für die insofern

nur triviale Quasiergodik gegeben ist, als $[\Psi]$ lauter abgeschlossene Trajektorien als Elemente hat. Ferner existieren offensichtlich auch beschränkte trajektorielle Partitionen, deren Trajektorien lauter abgeschlossene Trajektorien sind. Letztere sind dann aber geschlossene Trajektorien; solche Trajektorien, die zum Kreis \mathbb{S}^1 relativ homöomorph sind. Über das, was wir mit relativer Homöomorphie meinen, lassen wir uns hierbei nicht im Unklaren und wir gestatten uns die folgende exkursive Erläuterung:

Sind \mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2 zwei Topologien und liegen in deren zugehörigen topologischen Räumen $(\bigcup \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1)$ und $(\bigcup \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_2)$ die Mengen $A_1 \subset \bigcup \mathbf{T}_1$ und $A_2 \subset \bigcup \mathbf{T}_2$, so nennen wir diese beiden Mengen A_1 und A_2 genau dann zueinander relativ homöomorph bezüglich der Topologien \mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2 , wenn dieselben bezüglich der Relativtopologien $\mathbf{T}_1 \cap A_1$ und $\mathbf{T}_1 \cap A_2$ zueinander homöomorph sind. Exakt dann notieren wir

$$A_1 \sim_{\mathbf{T}_1 \sim \mathbf{T}_2} A_2 \quad (1.40)$$

und exakt andernfalls setzen wir $A_1 \not\sim_{\mathbf{T}_1 \sim \mathbf{T}_2} A_2$, wohingegen

$$A_1 \sim_{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2} A_2 \quad (1.41)$$

die Homöomorphie der Mengen A_1 und A_2 bezüglich der Topologien \mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2 notiere und dementsprechend $A_1 \not\sim_{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2} A_2$ gerade die Negation der Homöomorphie (1.41) schriftlich darstelle. Da das Mengensystem

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cap A &= \{U \cap A : U \in \mathbf{T}\} \\ &= \left\{ U \cap (A \cap \bigcup \mathbf{T}) : U \in \mathbf{T} \right\} = \mathbf{T} \cap (A \cap \bigcup \mathbf{T}) \end{aligned}$$

ist, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit von der relevanten Teilmenge $A \cap \bigcup \mathbf{T} \subset A$ ausgehen, die in dem topologischen Raum $(\bigcup \mathbf{T}, \mathbf{T})$ liegt.⁶ Die relative Homöomorphie ist insofern schwächer als die Homöomorphie, als die Implikation

$$A_1 \sim_{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2} A_2 \Rightarrow A_1 \sim_{\mathbf{T}_1 \sim \mathbf{T}_2} A_2 \quad (1.42)$$

⁶Allemal: Denn, selbst wenn A und $\bigcup \mathbf{T}$ disjunkt sind und in diesem Disjunktfall $A \cap \bigcup \mathbf{T} = \emptyset$ ist, gilt die Inklusion $A \cap \bigcup \mathbf{T} = \emptyset \subset \bigcup \mathbf{T}$. Der Disjunktfall liegt genau dann vor, wenn die Identität

$$\mathbf{T} \cap A = \{\emptyset\}$$

zutrifft; sodass das Mengensystem $\mathbf{T} \cap A$ exakt im Disjunktfall keine Topologie ist, falls wir den Begriff der Topologie so verfassen, wie er am weitesten verbreitet ist, nämlich so, dass für jede Topologie \mathbf{T} die Reichhaltigkeitsaussage $\bigcup \mathbf{T} \neq \emptyset$ gelte. Verlangten wir neben der finiten Schnittabgeschlossenheit einer Topologie und deren Abgeschlossenheit

wahr ist, die aber im Allgemeinen nicht umkehrbar ist. Die relative Homöomorphie ist dabei in dem Sinn eine universelle Äquivalenzrelation, als die Aussagen

$$\begin{aligned} A_1 &\sim_{\mathbf{T}_1} \sim_{\mathbf{T}_1} A_1, \\ A_1 &\sim_{\mathbf{T}_1} \sim_{\mathbf{T}_2} A_2 \Leftrightarrow A_2 \sim_{\mathbf{T}_2} \sim_{\mathbf{T}_1} A_1, \\ A_1 &\sim_{\mathbf{T}_1} \sim_{\mathbf{T}_2} A_2 \wedge A_2 \sim_{\mathbf{T}_2} \sim_{\mathbf{T}_3} A_3 \\ &\Rightarrow A_1 \sim_{\mathbf{T}_1} \sim_{\mathbf{T}_3} A_3 \end{aligned} \tag{1.43}$$

für alle Topologien \mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2 und alle Mengen $A_1 \subset \bigcup \mathbf{T}_1$ und $A_2 \subset \bigcup \mathbf{T}_2$ wahr sind.

Nun redeten wir aber soeben von zum Kreis \mathbb{S}^1 relativ homöomorphen Trajektorien, ohne die Referenz dieser besprochenen relativen Homöomorphie ausdrücklich festzulegen. Wir sagten ja nicht, bezüglich welcher Topologie des Raumes, in dem die jeweilige Trajektorie liegt und bezüglich welcher Topologie des Raumes, in dem der Kreis \mathbb{S}^1 liegt, die jeweilige Trajektorie zu dem Kreis \mathbb{S}^1 relativ homöomorph sei. Wenn wir den Kreis \mathbb{S}^1 kurzerhand in der Ebene situieren, die der \mathbb{R}^2 objektiviert, dann greifen wir mit diesem allzu naheliegenden Griff auch zu kurz. Inwiefern wir da zu kurz greifen und für welchen Zweck wir da zu kurz greifen?

Da bekanntlich kein Homöomorphismus existiert, der den \mathbb{R}^2 auf den \mathbb{R}^k abbildet, wenn $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ ist, ist das freie Reden über die Homöomorphie von Punktmengen, die im \mathbb{R}^n für eine beliebige Dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ liegen, nicht auf die Weise möglich, die uns die folgende Festlegung erlaubt: Es sei

$$\mathbb{S}^1(\mathbb{R}^2) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_{\mathbb{R}^2} = 1\}$$

und für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ sei

$$\mathbb{S}^1(\mathbb{R}^n) := \mathbb{S}^1(\mathbb{R}^2) \oplus (\delta_{1k})_{3 \leq j \leq n}$$

der in den \mathbb{R}^n eingebettete Kreis, wobei $\|\text{id}\|_{\mathbb{R}^2}$ die euklidische Norm des \mathbb{R}^2 sei. Ferner sei A eine Punktmenge, die auf die Weise homogen sei, dass es eine natürliche Zahl $n(A) \in \mathbb{N}$ gibt, für die $A \subset \mathbb{R}^{n(A)}$ gilt. Wenn wir nun

gegenüber Vereinigungen, dass lediglich die abgeschwächte Reichhaltigkeitsaussage $\mathbf{T} \neq \emptyset$ gelten solle, so wäre das Mengensystem $\mathbf{T} \cap A = \{\emptyset\}$ auch im besagten Disjunktionsfall eine Topologie. Halten wir uns hier aber an die Majorität und befinden, dass exakt im besagten Disjunktionsfall, exakt in dem $A \cap \bigcup \mathbf{T} = \emptyset$ ist, das Mengensystem $\mathbf{T} \cap A$ keine Topologie ist! Im Fall, dass A und $\bigcup \mathbf{T}$ einander schneiden, ist das Mengensystem $\mathbf{T} \cap A$ eine Topologie, exakt welche bekanntlich als die Spurtopologie oder die Relativtopologie der Topologie \mathbf{T} bezüglich A bezeichnet wird.

über eine solche, in dieser Form homogene Punktmenge A sagen, dass sie zu dem Kreis \mathbb{S}^1 homöomorph bzw. diffeomorph bzw. relativ homöomorph sei, dann meinen wir, dass A zu der passenden Einbettung des ebenen Kreises $\mathbb{S}^1(\mathbb{R}^2)$ in den $\mathbb{R}^{n(A)}$, also zu der objektaktualisierten Menge

$$\mathbb{S}^1(\mathbb{R}^{n(A)}) \subset \mathbb{R}^{n(A)}$$

homöomorph bzw. diffeomorph bzw. relativ homöomorph sei. Die euklidische Norm $\|\text{id}\|_{\mathbb{R}^2}$ legt dabei die euklidische Topologie des \mathbb{R}^2 fest, die wir auch als die natürliche Topologie des \mathbb{R}^2 bezeichnen. Unsere Darlegungen beschränken sich in dieser Abhandlung auf Zustandsräume Z , die in reellen Räumen \mathbb{R}^n endlicher Dimension $n \in \mathbb{N}$ liegen, wobei Z durch deren jeweilige natürliche Topologie $\mathbf{T}(n)$ topologisiert sei.

Da die Trajektorien τ , von denen hier die Rede ist, immer solche sind, die in einem reellen Raum \mathbb{R}^n endlicher Dimension $n \in \mathbb{N}$ liegen, und da die natürliche Topologie $\mathbf{T}(n(\tau))$ desjenigen Raumes $\mathbb{R}^{n(\tau)}$, in dem die jeweilige Trajektorie $\tau \subset: \mathbb{R}^{n(\tau)}$ liegt, mit demselben durch die jeweilige Trajektorie τ festgelegt ist, können wir uns hier ersparen, die Referenztopologien ausdrücklich festzuhalten, wenn wir über die relative Homöomorphie einer Trajektorie zu einer anderen Menge eines topologischen Raumes sprechen: Es ist $\mathbf{T}(n(\tau))$ die jeweilige Topologie, auf die sich hier gegebenenfalls eine jede Aussage über die relative Homöomorphie einer Trajektorie τ zu einer anderen Menge eines topologischen Raumes bezieht.

Wir legen vor diesem Hintergrund der thematischen Beschränkung dieser Abhandlung für alle Punktmengen $A \subset \mathbb{R}^{n(A)}$ und $B \subset \mathbb{R}^{n(B)}$ reeller Räume endlicher Dimension $n(A), n(B) \in \mathbb{N}$ die folgende Schreibweise fest: Es gelte

$$\begin{aligned} A \sim_{\mathbf{T}(n(A)) \sim \mathbf{T}(n(B))} B &\Leftrightarrow: A \sim \sim B, \\ A \not\sim_{\mathbf{T}(n(A)) \sim \mathbf{T}(n(B))} B &\Leftrightarrow: A \not\sim \sim B \end{aligned} \quad (1.44)$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} A \sim_{\mathbf{T}(n(A)), \mathbf{T}(n(B))} B &\Leftrightarrow: A \sim B, \\ A \not\sim_{\mathbf{T}(n(A)), \mathbf{T}(n(B))} B &\Leftrightarrow: A \not\sim B \end{aligned} \quad (1.45)$$

und schliesslich auch

$$\begin{aligned} A \sim \mathbb{S}^1(\mathbb{R}^{n(A)}) &\Leftrightarrow: A \sim \mathbb{S}^1, \\ A \not\sim \mathbb{S}^1(\mathbb{R}^{n(A)}) &\Leftrightarrow: A \not\sim \mathbb{S}^1, \\ A \sim \sim \mathbb{S}^1(\mathbb{R}^{n(A)}) &\Leftrightarrow: A \sim \sim \mathbb{S}^1, \\ A \not\sim \sim \mathbb{S}^1(\mathbb{R}^{n(A)}) &\Leftrightarrow: A \not\sim \sim \mathbb{S}^1. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Da für stetige Flussfunktionen Ψ mit kompaktem Zustandsraum ζ die Quasiperiodizität bzw. die Periodizität eines Zustandes $z \in \zeta$ bezüglich Ψ und die Quasizyklizität bzw. die Zyklizität der Trajektorie $\Psi(z, \mathbb{R})$ zueinander äquivalent sind, ist auch die Geschlossenheit einer Trajektorie $\tau \in [\Psi]$ zu deren relativer Homöomorphie zum Kreis äquivalent: Denn es gelten für jede stetige Flussfunktion Ψ mit kompaktem Zustandsraum $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ und für jeden Zustand $z \in \zeta$ die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
& \Psi(z, \mathbb{R}) = \mathbf{cl}(\Psi(z, \mathbb{R})) \Leftrightarrow \\
& \exists T \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \Psi(z, T) = z , \\
& \exists T \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \Psi(z, T) = z \Leftrightarrow \\
& \Psi(z,]0, T]) = \Psi(z, \mathbb{R}) \wedge \Psi(z, 0) = \Psi(z, T) \tag{1.47} \\
& \Psi(z,]0, T]) = \Psi(z, \mathbb{R}) \wedge \Psi(z, 0) = \Psi(z, T) \Leftrightarrow \\
& \Psi(z,]0, T]) \sim \mathbb{S}^1 ,
\end{aligned}$$

denn die Restriktionen

$$\Psi(z, \text{id})|]0, T] \quad \text{bzw.} \quad (\Psi(z, \text{id})|]0, T])^{-1}$$

sind stetig bezüglich $\mathbf{T}(1) \cap]0, T]$ und $\mathbf{T}(n) \cap \Psi(z, \mathbb{R})$ bzw. bezüglich $\mathbf{T}(n) \cap \Psi(z, \mathbb{R})$ und $\mathbf{T}(1) \cap]0, T]$.

Dass die relative Homöomorphie, wie wir mit der Implikation (1.42) bereits behaupteten, schwächer als die unrelativierte Homöomorphie ist, wird uns im \mathbb{R}^3 anschaulich: Ist $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Punktmengenrepräsentation des bekannten Kleeblattknotens im \mathbb{R}^3 , so gilt offensichtlich der Sachverhalt, den wir als die Aussage

$$K \sim \mathbb{S}^1 \wedge K \not\sim \mathbb{S}^1 \tag{1.48}$$

notieren. Unsere Untersuchungen werden ergeben, dass der kontinuierliche Determinismus, den stetige Flussfunktionen gemäss (1.3) objektivieren, die Alternative bedingt, die das Hauptthema dieser Abhandlung ist, wenn kompakte Zustandsräume endlichdimensionaler reeller Räume vorliegen: Die abgeschlossenen Hüllen jeweiliger Trajektorien, die mit den jeweiligen minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten zusammenfallen, sind dann entweder sensitive Attraktoren oder aber Fixpunkte oder geschlossene Trajektorien, solche Trajektorien also, die nach unserer nunmehr erläuterten Redeweise zum Kreis \mathbb{S}^1 relativ homöomorph sind. Deswegen kommt dem Fall, dass die

minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten keine sensitive Attraktoren oder Fixpunkte, sondern zum Kreis \mathbb{S}^1 relativ homöomorph sind, einige Wichtigkeit zu, weswegen wir es nicht unterliessen, die relative Homöomorphie im Exkurs der letzten Seiten zu beschreiben und dieselbe gegen die unrelativierte Homöomorphie abzugrenzen, die eine stärkere Eigenschaft ist.

Die herausgestellte Differenz von relativer Homöomorphie und unrelativierter Homöomorphie leitet uns naturgemäss zu der Frage, unter welchen Umständen die Kontinuität stetiger Flussfunktionen gemäss (1.3) überhaupt zulässt, dass jene herausgestellte Differenz durch die minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten realisiert sein kann, die im Rahmen des durch jene Flussfunktionen objektivierten kontinuierlichen Determinismus möglich sind: Unter welchen Umständen existieren für stetige Flussfunktionen Ψ gemäss (1.3) überhaupt Zustände x , sodass geschlossene Trajektorien $\Psi(x, \mathbb{R})$ auftreten, die zwar zum Kreis \mathbb{S}^1 nicht homöomorph sind, die zu demselben nichtsdestotrotz relativ homöomorph sind? Diese Frage können wir anschaulich kurzfassen als die Frage, unter welchen Umständen der kontinuierliche Determinismus zulässt, dass sich eine Trajektorie verknotet.

Die folgende Frage können wir nicht so einfach beantworten, wie die Frage, *ob* der kontinuierliche Determinismus zulässt, dass sich eine Trajektorie verknotet. Denn beispielsweise für jene bereits vorgestellte Konkretisierung des Kleeblattknotens als eine Punktmenge $K \subset \mathbb{R}^3$ gibt es ja offenbar eine stetige Flussfunktion Ψ_K , deren Zustandsraum K ist und die die einzige Trajektorie

$$K = \Psi_K(x, \mathbb{R})$$

für alle Zustände $x \in K$ hat. Gibt es aber eine Fortsetzung

$$\begin{aligned} \Psi_K^+ : Z \times \mathbb{R} &\rightarrow Z, \\ (z, t) &\mapsto \Psi_K^+(z, t) \end{aligned}$$

der Flussfunktion Ψ_K , die ebenfalls gemäss (1.3) beschaffen ist und für die

$$K = \Psi_K^+(x, \mathbb{R})$$

für alle Zustände $x \in K$ gilt und deren Zustandsraum Z überdies eine offene Kugel $\mathbb{B} \subset Z$ des \mathbb{R}^3 enthält, die ihrerseits die Repräsentation des Kleeblattknotens K enthält?

Wir stossen also auf den nicht schärfer umrissenen Fragenkreis, unter welchen Umständen für stetige Flussfunktionen Ψ gemäss (1.3) überhaupt Zustände x

existieren, sodass geschlossene Trajektorien $\Psi(x, \mathbb{R})$ auftreten, die zum Kreis \mathbb{S}^1 nicht homöomorph aber relativ homöomorph sind; und indem wir die mit diesem Fragenkreis verbundene Thematik hier nicht eingehender behandeln, stellen wir dieses Themenfeld als eine Aufgabe und als ein Arbeitsgebiet heraus. Auf Letzteres wollen wir uns aber nicht in dieser Abhandlung begeben, deren Thema eng lokalisiert ist. Letzteres ist ja „ein gesuchter, dennoch bislang übersehener elementarer Satz“, nämlich der Satz 1.1, der elementare Quasiergodensatz, den wir nun formulieren wollen:

1.1.3 Die Formulierung des elementaren Quasiergodensatzes

Da die minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten jeder trajektoriellen Partition Teilmengen des Zustandsraumes sind, gilt für kompakte Zustandsräume ζ kompakter trajektorieller Partitionen $[\Psi]$, dass $m \in \mathcal{M}^1([\Psi])$ beschränkt ist. Dabei nennen wir exakt trajektorielle Partitionen mit kompakten Zustandsräumen kompakt. Wenn $[\Psi]$ eine kompakte trajektorielle \mathcal{C}^1 -Partition ist, ist

$$\mathcal{M}^0([\Psi]) = \mathcal{M}^{1/2}([\Psi]) ,$$

wie wir später zeigen werden. Für kompakte trajektorielle Partitionen sind die Geschlossenheit ihrer Trajektorien oder die Mehrdimensionalität deren abgeschlossener Hüllen einander ausschliessende Alternativen. Und nur die irrige Vorstellung, dass die minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten einfach die Trajektorien sind, lässt den Sachverhalt dieser Alternative paradox erscheinen. Aber die Konstruktion minimaler invarianten Mannigfaltigkeiten ist keine, die Trajektorien lediglich auf eine andere Weise beschreibt. Wir erläuterten die Differenz zwischen minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten und Trajektorien bereits und verweisen wiederholt auf den Satz **A.1** des Anhanges. Minimale invariante Mannigfaltigkeiten können höher als eindimensional sein. Dies aber sahen wir nun schon ein: Nur innerhalb minimaler invarianten Mannigfaltigkeiten kann Quasiergodik vorliegen, weil jede Trajektorie exakt innerhalb einer solchen verläuft. Sei beispielsweise eine minimale invariante \mathcal{C}^1 -Mannigfaltigkeit im Fall einer Vielteilchen-Interpretation einer jeweiligen, hinreichend kontinuierlichen Flussfunktion Ψ nicht mit der entsprechenden Energiehyperfläche identisch, was dann der Fall ist, wenn die Energie nicht die einzige Invariante dieser Flussfunktion Ψ ist: Dann kann keine Quasiergodik innerhalb der gesamten Energiehyperfläche vorliegen. Die

Quasiergodik innerhalb der gesamten Energiehyperfläche gibt es nur, wenn die Energie die einzige Invariante ist und es zeichnet sich ab, dass dies nur in speziell konstruierten Fällen gegeben ist. Bei einem kompakten Zustandsraum müsste, damit die Energie die einzige Invariante ist, die gesamte Energiehyperfläche ein sensitiver Attraktor sein, wie wir noch sehen werden. Wir verweisen auf den zweiten Abschnitt des folgenden Kapitels.

Bestünde die Differenz zwischen minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten und Trajektorien nicht, so wäre unsere folgende Modellierung der Quasiergodenhypothese nicht zweckmässig. Die Behauptung des folgenden Satzes setzen wir nämlich nun als die Objektivierung der Quasiergodenhypothese im Sinne P. und T. Ehrenfests an, die die minimalinvasive Abwandlung von Boltzmanns unhaltbarer Ergodenhypothese ist:

Elementarer Quasiergodensatz 1.1:

Alle Trajektorien $\tau \in [\Psi]$ einer stückweise glatten minimalen invarianten Mannigfaltigkeit $\mu \in \mathcal{M}^{1/2}([\Psi])$ einer kompakten trajektoriellen \mathcal{C}^1 -Partition $[\Psi]$ liegen jedem Punkt der Mannigfaltigkeit μ beliebig nahe. Es gilt für alle $\tau \in [\Psi]$ und für alle $\mu \in \mathcal{M}^{1/2}([\Psi])$ die Äquivalenz

$$\tau \subset \mu \Leftrightarrow \mathbf{cl}(\tau) = \mu . \quad (1.49)$$

Stückweise glatte minimale invariante Mannigfaltigkeiten $\mu \in \mathcal{M}^{1/2}([\Psi])$ können wir als heterogene Niveauliniensysteme von Tupeln stückweise differenzierbarer Invarianten der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ auffassen. Die stückweise glatten minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten $\mu \in \mathcal{M}^{1/2}([\Psi])$ partitionieren den Zustandsraum $\mathbf{P}_2\Psi$ per Konstruktionem, sodass es eine Parzialbehauptung des elementaren Quasiergodensatzes ist, dass das Mengensystem

$$[[\Psi]] := \{\mathbf{cl}(\tau) : \tau \in [\Psi]\} \in \mathbf{part}(\mathbf{P}_2\Psi) \quad (1.50)$$

den Zustandsraum $\mathbf{P}_2\Psi$ partitioniert. Gerade diese Parzialbehauptung des elementaren Quasiergodensatzes ist die Aussage des Satzes von der Existenz der Zimmer 2.1.2, die wir im Abschnitt 2.1 beweisen. Diese Parzialbehauptung ist insofern eine homöomorphe Invariante, als für jeden Homöomorphismus h mit der Definitionsmenge $\mathbf{P}_1h = \mathbf{P}_2\Psi$ die kotransformierte Aussage

$$[[h \circ \Psi]]_{\mathbf{T}(\mathbf{P}_2h)} := \{\mathbf{cl}_{\mathbf{T}(\mathbf{P}_2h)}(\tau) : \tau \in [h \circ \Psi]\} \in \mathbf{part}(\mathbf{P}_2h) \quad (1.51)$$

gilt, wobei $\mathbf{T}(\mathbf{P}_2h)$ eine Topologie der Wertemenge \mathbf{P}_2h dieses Homöomorphismus h sei; und für alle Teilmengen $X \subset A$ sei für eine beliebige Topologie $\mathbf{T}(A)$, die eine beliebige Menge A topologisiert

$$\mathbf{cl}_{\mathbf{T}(A)}(X) := \bigcap \left\{ U \in \mathbf{T}(A) : X \subset U \right\} , \quad (1.52)$$

sodass $\mathbf{cl}_{\mathbf{T}(\mathbf{P}_2h)}$ der transformierte Hüllenoperator ist. Für jede Menge A und für jede Funktion $\Phi \in A^{A \times \mathbb{R}}$ und für jede Topologie $\mathbf{T}(A)$ sind die Mengensysteme

$$\begin{aligned} [\Psi] &:= \{ \Psi(x, \mathbb{R}) : x \in A \} , \\ [[\Psi]]_{\mathbf{T}(A)} &:= \{ \mathbf{cl}_{\mathbf{T}(A)}(\tau) : \tau \in [\Psi] \} \end{aligned} \quad (1.53)$$

festgelegt, wobei $[[\Psi]]$ einfach $[[\Psi]]_{\mathbf{T}(A)}$ sei, wenn $\mathbf{T}(A)$ die natürliche Topologie desjenigen \mathbb{R}^n natürlicher Dimension $n \in \mathbb{N}$ sei, in dem A liegt, sofern A so beschaffen ist, dass dieser \mathbb{R}^n existiert. Daher können wir

$$\begin{aligned} [\text{id}] &:= \{ \text{id}(x, \mathbb{R}) : x \in \mathbf{P}_2\text{id} \} , \\ [[\text{id}]]_{\mathbf{T}} &:= \{ \mathbf{cl}_{\mathbf{T}}(\tau) : \tau \in [\text{id}] \} , \\ [[\text{id}]] &:= \{ \mathbf{cl}_{\mathbf{T}(\mathbf{P}_2\text{id})}(\tau) : \tau \in [\text{id}] \} \end{aligned} \quad (1.54)$$

als Operatoren oder als Abbildungen der Klasse derjenigen Funktionen f auffassen, für die es eine Menge A gibt, sodass f in der Menge $A^{A \times \mathbb{R}}$ ist. Dabei muss \mathbf{T} eine jeweils angegebene Topologie sein, die die jeweilige Wertemenge $\mathbf{P}_2\text{id}$ topologisiert; oder aber es muss $\mathbf{P}_2\text{id}$ in einem \mathbb{R}^n liegen, dessen natürliche Topologie dann $\mathbf{T}(\mathbf{P}_2\text{id})$ sei. Im Fall einer Heine-Descartesschen Kollektivierung $[\Psi]$ setzt sich die Zyklizitätsbedingung an jeweilige Trajektorien τ , welche der Zwischenwertsatz als das In-Einsfallen von Trajektorie τ und deren Hülle $\mathbf{cl}(\tau)$ gemäss der Unreichhaltigkeit

$$\mathbf{cl}(\tau) \setminus \tau = \emptyset$$

zu formulieren erlaubt, in der Form um, dass $[[\Psi]] \setminus [\Psi]$ gerade das Mengensystem der entsprechenden nicht-trivialen Zimmer ist und dass genau dann

$$[[\Psi]] \setminus [\Psi] = \emptyset$$

ist, wenn alle Trajektorien der Heine-Descartesschen Kollektivierung $[\Psi]$ Zyklen sind.

Bei dieser Gelegenheit können wir sogleich klären, was wir ganz allgemein als eine Flussfunktion und als eine Wellenfunktion auffassen: Jede Abbildung der

Klasse derjenigen Funktionen f , für die es eine Menge A gibt, sodass f in der Menge $A^{A \times \mathbb{R}}$ ist, d.h., jede Funktion f , für die

$$\mathbf{P}_2 f = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1 f \wedge \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 f = \mathbb{R} \quad (1.55)$$

gilt, nennen wir eine Wellenfunktion. Jede Wellenfunktion nennen wir genau dann eine Flussfunktion, wenn

$$[f] \in \mathbf{part}(\mathbf{P}_2 f) \quad (1.56)$$

ist; und genau dann sagen wir, dass f eine Flussfunktion binnen $\mathbf{P}_2 f$ sei.

Es ist diese (1.51) gemässe topologische Invarianz der Aussage des Satzes von der Existenz der Zimmer 2.1.2, die denselben allgemein und zum wohl bedeutendsten Gesichtspunkt des elementaren Quasiergodensatzes macht. Suggestiv gesprochen: Auch, wenn wir das durch eine kompakte trajektorielle \mathcal{C}^1 -Partition $[\Psi]$ beschriebene Szenario mittels der Transformation desselben durch einen Homöomorphismus quasi zerknüllen, so bleibt die von dem Satz von der Existenz der Zimmer behauptete Parzialbehauptung des elementaren Quasiergodensatzes, die Partitivität gemäss (1.51) gültig.

Offenbar wird allein schon durch den Satz von der Existenz der Zimmer 2.1.2 bereits die Ergodenfrage kontinuierlicher dreidimensionaler Billards geklärt. Unter einem kontinuierlichen dreidimensionalen Billard verstehen wir dabei ein Punktteilchensystem von $N \in \mathbb{N}$ Punktteilchen, all deren Ortskoordinaten innerhalb eines zusammenhängenden Kompaktums $R \subset \mathbb{R}^3$ verbleiben, an dessen Rand ∂R sie auf kontinuierliche und beschränkte Weise in dieses Kompaktum R zurückgestreut werden. Dabei streuen die Punktteilchen auch aneinander, ebenfalls auf kontinuierliche und beschränkte Weise; was heissen soll, dass sowohl die Streuvorgänge aneinander als auch jene Rückstreuprozesse so ablaufen, dass sich die Teilchengeschwindigkeiten stetig ändern und dass dabei deren Beträge immer unterhalb einer für das jeweilige Billard vorgegebenen Grenze $V \in \mathbb{R}$ liegen. Die kontinuierlichen dreidimensionalen Billards umfassen die kontinuierlichen zweidimensionalen Billards, die speziell so beschaffen sind, dass die Ortskoordinaten aller Punktteilchen innerhalb eines zusammenhängenden Kompaktums $R \subset \mathbb{R}^3$ sind, das in einer Ebene liegt. Wir bemerken hierbei, dass im Hinblick auf den Satz von der Existenz der Zimmer 2.1.2 die Komponentenzahl der Ortskoordinaten der Punktteilchen keine Rolle spielt. Wir können genausogut ein m -dimensionales kontinuierliches Billard betrachten, bei dem $N \in \mathbb{N}$ Quasiteilchen aneinander oder am Rand ∂R eines zusammenhängenden Kompaktums $R \subset \mathbb{R}^m$ auf kontinuierliche und beschränkte Weise streuen. Die Quasiteilchen sind dabei durch

m -Tupel $r \in R \subset \mathbb{R}^m$ dargestellt und m ist dabei eine natürliche Zahl. Diese Quasiteilchen sind dann nicht als physische Massenpunkte interpretiert. Wie klärt nun schon der Satz von der Existenz der Zimmer die Ergodenfrage kontinuierlicher multidimensionaler Billards? Der Zustandsraum $\zeta \subset \mathbb{R}^{2mN}$ eines kontinuierlichen m -dimensionalen Billards von N Quasiteilchen ist als ein kompakter Zustandsraum formulierbar, in dem der jeweilige Ortsraum, der im \mathbb{R}^{mN} liegt, eingebettet ist; etwa auf die Weise, dass

$$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{mN})\zeta = \underbrace{R \oplus R \dots \oplus R}_{N \text{ Kokatenationen}} \subset \mathbb{R}^{mN}$$

der zum kartesischen Produkt R^N isomorphe Ortsraum ist. Die den Zustandsraum ζ partitionierenden Trajektorien sind stetig. (Die Stetigkeit der Trajektorien soll dabei dies besagen: Wenn $\Psi \in \zeta^{\zeta \times \mathbb{R}}$ die Flussfunktion des jeweiligen kontinuierlichen multidimensionalen Billards ist, sodass für jeden Zustand $x \in \zeta$ die Punktmenge $\Psi(x, \mathbb{R})$ eine Trajektorie darstellt, so ist jede Trajektorie $\Psi(x, \mathbb{R})$ die Wertemenge der stetigen Funktion $\Psi(x, \text{id})$, die auf dem Zahlenstrahl \mathbb{R} definiert ist.) Die mehr als eindimensionalen abgeschlossenen Hüllen, die mehr als eindimensionalen Zimmer, sind gemäss dem Satz von deren Existenz 2.1.2 auf nicht triviale Weise quasiergodisch; und Fixpunkte oder Zyklen sind auf triviale Weise quasiergodisch.

Zwar wird alleine durch den Satz 2.1.2 die Ergodenfrage multidimensionaler kontinuierlicher Billards geklärt, die vielfach untersuchten, sogenannten Billards aber, bei denen Stösse und Reflexionen an den Banden diskontinuierlich modelliert sind, entziehen sich aber der unmittelbaren Anwendung des Satzes von der Existenz der Zimmer, der keine Aussage über die Ergodenfrage von Zustandsräumen macht, die durch Trajektorien partitioniert sind, die nicht stetig sind; die also gleichsam auseinanderreissen. Wir dürfen hier stolz bemerken, dass unsere mathematische Formulierung des Quasiergodenproblem es zwar einerseits mehr leistet, als den Bedarf der Physik kausal abgeschlossener und finiter Systeme zu decken, falls deren jeweilige trajektorielle Partitionen von \mathcal{C} -Kontinuität sind; d.h., so, dass alle Trajektorien stetig sind. Andererseits erfordert schon die Behandlung der vielfach untersuchten Billards eine Ausdehnung des Satzes von der Existenz der Zimmer 2.1.2, die über die \mathcal{C} -Kontinuität der jeweiligen trajektoriiellen Partitionen hinausgeht. Auf diese Ausdehnung des Satzes von der Existenz der Zimmer 2.1.2 auf trajektorielle Partitionen mit nur stückweise stetigen Trajektorien gehen wir in diesem Traktat nicht ein, in dem wir stattdessen anderen Gesichtspunkten nachgehen.

Warum? Warum schreiten wir überhaupt zuerst über den Satz von der Existenz der Zimmer 2.1.2 hinaus zum elementaren Quasiergodensatz 1.1 fort, ehe wir 2.1.2 für stückweise stetige trajektorielle Partitionen generalisieren? Und zeigen stattdessen die Identität der Zimmer mit den stückweise glatten minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten $\mu \in \mathcal{M}^{1/2}([\Psi])$? Wir wollen uns nicht vorhalten, dass wir zwar mit dem Satz von der Existenz der Zimmer die Ergodenfrage abgeschlossener Systeme beantworten, dabei die jeweiligen Zimmer aber insofern nicht kennen, als sich uns kein Weg zeigt, sie explizit zu bestimmen! Gemäss (1.36) ist das Mengensystem minimaler invarianter Mannigfaltigkeiten

$$\mathcal{M}^{1/2}([\Psi]) = \left\{ \lambda^{-1}(\omega) : (\lambda, \omega) \in \text{Inv}^{1/2}([\Psi]) \times \mathbb{R} \right\} [3] . \quad (1.57)$$

Eingestanden, die explizite Bestimmung der minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten gemäss dieser Identifizierung ist dabei, wie wir erläuterten, zunächst wenig verfahrensgebend, doch womit uns findige Numeriker – oder findige Analytiker – überraschen, können wir nicht absehen.

Die Identität (1.57) und ihr Beweis im Abschnitt 2.3 mittels kinezentrischer Felder hat aber hervorgehobenermassen vor dem Hintergrund der Identifizierung nicht trivialer Zimmer mit sensitiven Attraktoren im Abschnitt 2.2 eine weitreichende Bedeutung, die über die Interpretation innerhalb der Physik hinaus reicht:

Dass innerhalb jeder Modellierung eines deterministisch evolvierenden Szenario einer empirischen Wissenschaft durch einen kompakten Zustandsraum mit glatten Trajektorien die mögliche Kenntnis über ein kausal abgeschlossenes und finites System damit ausgeschöpft ist, dass dessen Invariante und eine aktuelle Lokalisierung dessen Zustandes bekannt ist, ist fürwahr nichts Neues. Das ist das Thema der Hamiltonischen Theorie. Sie lehrt uns, dass die Kenntnis aller Invarianter und die Asymptote beliebig scharfer Zustandslokalisierung der maximale Kenntnisstand ist, weil dieser Kenntnisstand der totale ist.

Dass dabei die aktuelle Lokalisierung eines Zustandes in einem sensitiven Attraktor im Hinblick auf die Bestimmung einzelner Trajektorien, die dessen jeweilige Zustandsentwicklungen darstellen, gänzlich wertlos ist, dass die einzelne Trajektorie in einem sensitiven Attraktor ohne empirische Relevanz ist und die einzelne Trajektorie nur noch eine ideelle Hilfslinie zur Konstruktion des jeweiligen sensitiven Attraktors ist, ist die Bote der Chaostheorie. Das ist fürwahr auch nicht neu.

Der Satz von der Existenz der Zimmer sagt nun aber mehr, wenn er uns zeigt, dass die aktuelle Lokalisierung des Zustandes einer Darstellung eines kausal abgeschlossenen und finiten Systemes *im generischen Fall* die Lokalisierung in einem sensitiven Attraktor ist. Und das ist sehr wohl neu.

Es wurde zwar bislang durchaus schon vorgefunden, dass wir „in der Realität“ auf Schritt und Tritt auf „nichtlineare Systeme“ stossen und es in deren jeweiligen Zustandsräumen sensitive Attraktoren *geben kann* und in der Regel auch gibt, in denen die nicht noch ärger dramatisierbare Form „chaotischen Verhaltens“ vorliegt. Diese Aussage, dass „Chaos“ insofern „ganz normal“ sei, ist aber eine höchst unscharfe, wengleich eine zutreffend negative Einschätzung der Beschreibbarkeit der Welt. Hier nun wird eine weitere Dramatisierung dieser Beschreibbarkeitsnegation vorgelegt: Es gibt diese mit dem sensitiven Attraktor verbundene dramatischste Form „chaotischen Verhaltens“ nicht nur „normalerweise in der Realität“: Diese dramatischste Form ist die einzige Alternative zur Statik des Fixpunktes oder zur Zykliz der geschlossenen Trajektorie – falls ein kompakter Zustandsraum vorliegt. Ist letztere nicht gegeben, dann liegt der Zerfall des Systemes vor, wie wir hier nicht ausführen werden. Insofern ist durch den elementaren Quasiergodensatz 1.1 die durch die Chaostheorie negierte Beschreibbarkeit der Welt sowohl extremalisiert als auch universalisiert.

Jeder jeweilige sensitive Attraktor ist dabei gemäss (1.57) durch die Invarianten vollständig festgelegt. Auch das ist also neu, dass sich gemäss der Ergänzung des Satzes 2.1.2. zum elementaren Quasiergodensatz 1.1 damit die empirische Relevanz der Trajektorien hin zu der *Relevanz der Invarianten* des Systemes verschiebt. Das, was die Relevanz der Invarianten nicht zur totaleinzigen, zu einzig deren Relevanz macht, ist lediglich, dass sogar noch in einem sensitiven Attraktor eine jeweilige Lokalisierung eines Zustandes eine Aussage über die Transeabilität dieser Lokalisierung in eine andere erlaubt. Diese Transeabilität ist zwar mit Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung formulierbar. Diese Transeabilität überschreitet aber den Radius der herkömmlichen Masstheorie in provokanter, in zunächst geradezu paradoxer Weise: Die Übergänge von einer jeweiligen Lokalisierung eines Zustandes eines sensitiven Attraktors in eine andere Lokalisierung sind nämlich durch Trajektorienabschnitte objektiviert, die alle das Lebesgue-Mass null haben. Und was ist schliesslich dies, wie aus dem Beweis der Supplementierung des Satzes 2.1.2. zum elementaren Quasiergodensatz 1.1 im Abschnitt 2.3 hervorgeht, dass die Invarianten des Systemes zu den erhebbaren Mittelwerten über den jeweiligen Attraktor äquivalent sind? Diese erhebbaren Mittelwerte

eines ν -dimensionalen Attraktors sind insofern zu den Invarianten des Systemes mit n Freiheitsgraden äquivalent, als $n - \nu$ erhebbare unabhängige Mittelwerte genauso wie die $n - \nu$ Invarianten des jeweiligen Attraktors denselben festlegen. Was ist nun schliesslich dies? Dies ist nicht weniger als die endgültig geschärfte Formulierung der Boltzmannschen Hellsicht seiner tragischen Ergodenhypothese.

Es sei f ein stückweise diffeomorpher Homöomorphismus des \mathbb{R}^n in sich, dessen Wertemenge $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ ist. Für f und für jede kompakte trajektorielle Partition $[\Psi]$ gilt offensichtlich, dass $f([\Psi])$ eine kompakte trajektorielle Partition ist und, dass alle diese stückweise diffeomorphen Homöomorphismen f differenzierbare Mannigfaltigkeiten in dem Sinn erhalten, dass die Äquivalenz

$$\mu \in \mathcal{M}^{1/2}([\Psi]) \Leftrightarrow f(\mu) \in \mathcal{M}^{1/2}(f([\Psi]))$$

gilt. Wobei ausserdem die Äquivalenz

$$\tau \in [\Psi] \Leftrightarrow f(\tau) \in f([\Psi])$$

wahr ist und, dass für alle $\tau \in T([\Psi])$, $\mu \in \mathcal{M}^{1/2}([\Psi])$ die Äquivalenz

$$\mathbf{cl}(\tau) = \mu \Leftrightarrow \mathbf{cl}(f(\tau)) = f(\mu)$$

gilt: Diese stückweise diffeomorphen Homöomorphismen f erhalten invariante minimale Mannigfaltigkeiten, Trajektorien und deren Abschlüsse. Es gilt also:

Wenn wir zeigen können, dass für alle kompakten trajektoriiellen \mathcal{C}^1 -Partitionen $[\Psi]$ gilt

$$\{\mathbf{cl}(\tau) : \tau \in [\Psi]\} = \mathcal{M}^{1/2}([\Psi]) \quad (1.58)$$

und zweitens, dass für sie für alle $\tau \in [\Psi]$, $\mu \in \mathcal{M}^{1/2}([\Psi])$ die Äquivalenz

$$\mathbf{cl}(\tau) = \mu \Leftrightarrow \tau \in \mu \quad (1.59)$$

gilt, zeigen wir, dass der elementare Quasiergodensatz wahr ist.

Diese beiden reduzierten, zentralen Aussagen werden wir nun in den Abschnitten 2.1 und 2.3 beweisen. Der Abschnitt 2.2 ist mehr als ein aufschlussreiches Interludium. In diesem Abschnitt zeigen wir die Sensitivität für nicht triviale Zimmer, welche der Satz 2.2.2 behauptet. Dessen Korollar, der Trivialitätssatz ist es, der den Zweck unsere Konzeption, mit Hilfe

der Komanenz und Immanenz zu argumentieren, deutlich macht. Der Trivialitätssatz grenzt den Satz von der Existenz der Zimmer 2.1.2 ab gegen die relativ triviale Partitivitätsbehauptung, die für insensitive Phasenflüsse gilt. Das Fazit des Satzes 2.2.2 ist es, dass kontinuierliche dynamische Systeme entweder keinen kompakten Zustandsraum haben, was dem Systemzerfall⁷ entspricht; oder aber – grob gesagt – sie sind in dem Sinn stabil, dass deren Zustandsraum kompakt ist und dann liegt aber die Universalität sensitiver Attraktoren insofern vor, als für diese kontinuierlichen dynamischen Systeme die Alternativengegebenheit gilt, die dem Hamletschen Fragen

sensitiver Attraktor oder Zyklus oder Fixpunkt – das ist hier die Frage!

zugrundeliegt.

Wer bis hierher mitkam, dem ist deutlich geworden, dass diese Abhandlung noch diese Frage offen lässt: Nämlich die Frage, ob es überhaupt nicht-triviale Zimmer für Heine-Descartessche Kollektivierungen gibt. Ja, diese Frage bleibt offen, was uns wenig verwundern sollte.

Auch nach Abschluss dieser Abhandlung ist die Frage, ob es überhaupt nicht-triviale Zimmer gibt, nicht in dem Sinn reduzierbar, dass aus der Insensitivität jeder Heine-Descartesschen Partition, die nur Zyklen umfasst, die Existenz nicht-triviale Zimmer folgt. Die Insensitivität jeder Heine-Descartesschen Partition, die nur Zyklen umfasst, gälte es dabei erst zu zeigen. Gesetzt, dies gelänge, so folgte damit aber die Existenz nicht-triviale Zimmer auch noch nicht:

Wenn es eine Heine-Descartessche Kollektivierung gibt, die eine Partition einer kompakten Mannigfaltigkeit in lauter Zyklen oder Fixpunkte ist und welche dabei nicht insensitive eichbar ist, (d.h., wenn jede Partition $[\Psi]$ einer kompakten Mannigfaltigkeit in lauter Zyklen oder Fixpunkte, die lokal parallel verlaufen, so beschaffen ist, dass diese Partition $[\Psi]$ nicht insensitive eichbar ist,) dann ist es möglich, dass es keine nicht-trivialen Zimmer für Heine-Descartessche Kollektivierungen gibt; für Heine-Descartessche Kollektivierungen genauso wenig, wie für

⁷Der Fall, dass Trajektorien in einen im Unendlichen liegenden Zustand laufen, jedoch aus demselben zurückkehren, ist transformatorisch reduzierbar auf die Beschreibung in einem entsprechend transformierten kompakten Zustandsraum. Nur, wenn die Trajektorien in einen im Unendlichen liegenden Zustand laufen und dabei nicht mehr in beschränkbare Bereiche zurückkehren, ist diese transformative Reduktion auf den Fall nicht mehr möglich, in dem die Prämissen des Satzes von der Existenz der Zimmer vorliegen. Dieser irreduzible Fall eines nicht kompakten Zustandsraumes beschreibt den Systemzerfall.

insensitive Kollektivierungen. Wir sind dabei geneigt, zu sagen, dass aber der andere Fall, dass es keine solche Partition $[\Psi]$ gibt, offensichtlich zutreffe. Dieser andere Fall schliesst nicht aus, dass keine nicht-trivialen Zimmer existieren. Wenn jede solche Heine-Descartessche Partition $[\Psi]$ in Zyklen oder Fixpunkte so beschaffen ist, dass es eine Flussfunktion $\hat{\Psi}$ gibt, für die $[\Psi] = [\hat{\Psi}]$ ist, wobei $\hat{\Psi}$ insensitiv ist und nur stetige Flüsse hat, dann ist nämlich nur gezeigt, dass es nicht-triviale Zimmer für Heine-Descartessche Kollektivierungen geben muss – sofern es Heine-Descartessche Kollektivierungen kompakter Mannigfaltigkeiten gibt, die – sensitiv sind... Ist das teuflisch? zyklisch? zirkulös?

Wir kommen um den konstruktiven Nachweis nicht-trivialer Zimmer letztlich wohl nicht herum. Dieser Nachweis ist erbracht, wenn wir für ein einziges konkretes dynamisches System, dessen Trajektorien eine Heine-Descartessche Kollektivierung bilden, zeigen, dass es nicht lauter zyklische Trajektorien hat.

Kapitel 2

Der Beweis des elementaren Quasiergodensatzes

Allen Kraftvollen: Der Stein rollt!

2.1 Erster Schritt: Der reelle Determinismus impliziert, dass Zimmer existieren.

Was sind Zimmer? – Was Zimmer hier innerhalb dieser Abhandlung sind, das haben wir bereits im letzten Unterabschnitt gesagt: Zimmer sind die abgeschlossenen Hüllen von Trajektorien. Sie sind aber nicht etwa die abgeschlossenen Hüllen irgendwelcher eindimensionaler Mannigfaltigkeiten. Nein, sie sind die abgeschlossenen Hüllen

$$\text{cl}_{\mathbf{T}(\mathbf{P}_2h)}(\tau) \in [[h \circ \Psi]]_{\mathbf{T}(\mathbf{P}_2h)}$$

der homöomorphen Bilder $h(\tau)$ der Trajektorien $\tau \in [\Psi]$ einer trajektoriel-
len Partition $[\Psi]$ für einen Homöomorphismus h bezüglich der Topologien $\mathbf{T}(\mathbf{P}_1h)$ und $\mathbf{T}(\mathbf{P}_2h)$. Wir sehen, dass es Zimmer auch in viel allgemeineren Räumen als in endlichdimensionalen und reellen Räumen gibt. Ob sich die Benennung der Zimmer als solche verfestigen wird, oder aber, ob letztere bloss eine Arbeitsbenennung innerhalb dieses Traktates bleibt, das sie mit sensitiven Attraktoren identifizieren wird, sei dahingestellt.¹

¹Nicht nur die Theorie des Determinismus metrischer Räume ist dem Autor bereits wohlvertraut. Letztere sprengt aber den hier gesteckten Rahmen. In der allgemeinen Theo-

Wir haben jene zwei ganz am Schluss des ersten Abschnittes exponierten Aufgaben gestellt, diejenigen Behauptungen zu beweisen, die (1.59) und (1.58) darstellen. Die Exponierung der Äquivalenz (1.59) und der Identität (1.58) ist das Ergebnis der Konzentrierung der Quasiergodenfrage auf die entsprechenden beiden Beweisaufgaben. Die Zentralität der Äquivalenz (1.59) und der Identität (1.58) besteht gerade darin, dass die Konzentrierbarkeit der Quasiergodenfrage auf (1.59) und (1.58) gegeben ist.

Die Identität (1.58) erweitert die Äquivalenz (1.59) zu der Aussage, dass für jede trajektorielle Partition $[\Psi]$ und für jede deren minimaler invarianter Mannigfaltigkeiten $\mu \in \mathcal{M}^{1/2}([\Psi])$ und für jede der Trajektorien $\tau \in [\Psi]$ der trajektoriiellen Partition $[\Psi]$ sogar die Identität

$$\mathbf{cl}(\tau) = (\mathcal{M}^{1/2}([\Psi]))_\tau \quad (2.1)$$

wahr ist. Ohne, dass wir in diesem enggesteckten Rahmen die logische Architektur der Theorie dynamischer Systeme im Hinblick auf die Quasiergodenproblematik darlegen wollen, um innerhalb jener herausgearbeiteten logischen Architektur die Position der Aussagen (1.58) und (1.59) zu bestimmen: Wir widmeten den ersten Abschnitt dieser Zielsetzung, darzustellen, dass die Äquivalenz (1.59) die Quasiergodenfrage schon im Wesentlichen beantwortet. Wenn wir jene beiden Beweisaufgaben erfüllen, (1.58) und (1.59) zu zeigen, beschreiben wir die Geometrie der trajektoriiellen Partitionen. Geometrie nennen wir vereinfachterweise die Behandlung von Punktmengen in endlichdimensionalen und reellen Räumen.

Es gibt eine Verallgemeinerung von trajektoriiellen Partitionen für metrische

rie tut sich die Differenz zwischen generalisierten Zimmern und generalisierten Attraktoren auf und der Begriff der Zimmer und der Begriff der Attraktoren verzweigt sich, was die eigene Benennung der in diesem Sinn autonomen generalisierten Zimmer rechtfertigt. Begriffsverzweigung dieser Art gibt es bei so mancher Generalisierung, wie alte wie junge alte Hasen wissen: Wenn eine Generalisierung den Bereich verlässt, innerhalb welchem eine Symmetrie gegeben ist, dann dissoziieren auch die begrifflichen Koinzidenzen, welche diese Symmetrie voraussetzen. Die prägenerelle Symmetrie kann dabei eine im Stillschweigen vorausgesetzte sein, wenn dieselbe erst ausserhalb jenes Bereiches, erst im allgemeineren Rahmen als eine relative formulierbar ist, die nur im Bezug auf die allgemeinen Konstrukte der verallgemeinerten Theorie konstituierbar ist. Dann geht die Generalisierung mit der Entdeckung der Symmetrie des jeweiligen prägenerellen Generalisierungskeimes einher. Die eine Seite der Medaille ist die jeweilige verallgemeinerungserzeugte Begriffsdissoziation, deren andere ist die Entdeckung der jeweiligen verallgemeinerungserzeugten Symmetrie des Prägenerellen.

Räume, in denen generalisierte Trajektorien existieren. Diese Verallgemeinerungen trajektorieller Partitionen können je nach der Reichhaltigkeit der ihnen zugrundeliegenden metrischen Räume allerdings auch recht triviale Konstruktionen sein. Heine-Descartessche trajektorielle Partitionen sind komanent und global immanent:

Wir finden nämlich folgende beiden auf der Grundlage der Metrisiertheit des Zustandsraumes verallgemeinerbaren Eigenschaften der trajektoriellen Partitionen, mit denen es folgende Bewandnis hat: Diese beiden Eigenschaften von trajektoriellen Partitionen sind die Grundlage einer abstrakteren und axiomatischen Fassung der Ergodentheorie, die sich weit über die Ergodentheorie endlichdimensionaler und reeller Zustandsräume hinaus fortsetzen lässt, nämlich sogar über metrische Zustandsräume hinaus. Und schon alleine deshalb sollen wir jene beiden Eigenschaften herausstellen, auch wenn wir hier auf die generalisierte Ergodentheorie nicht eingehen.

Wir müssen aber geradezu jene besagten beiden verallgemeinerbaren Eigenschaften aus folgenden Grund präsentieren: Ihre kombinierte Betrachtung leitet nämlich zur zu beweisenden Einsicht, dass die abgeschlossenen Hüllen der Trajektorien einer jeweiligen trajektoriellen Partition deren Zustandsraum partitionieren.

Wir sind hier bemüht, nicht alleine für überragende Experten zu schreiben. Deshalb widmen wir mancher Betonung Raum: Und vielleicht ist selbst der Fachmann nicht dagegen gefeit, beim flüchtigen Blick die zu zeigende Partitivität

$$[[\Psi]] \in \mathbf{part}(\mathbf{P}_2\Psi)$$

für **Heine-Descartessche Kollektivierungen** $[\Psi]$ gemäss der Punkte (1)-(3) der Einleitung und die gleiche Partitivität für **insensitive Kollektivierungen** $[\Psi]$ gemäss (1.12) auseinanderzuhalten. Dann muss jener unsere Argumentation als umständlich und als befremdlich empfinden.

Für insensitiv eichbare Flussfunktionen ist der Beweis jener Partitivität einfach und bekannt. Dem weniger Versierten darf die Aufgabe zugemutet werden, diesen einfach Beweis zu formulieren: Dazu braucht es die Konzeption von Komanenz und Immanenz freilich nicht. Die Aufgabe indess, jene Partitivität für Heine-Descartessche Kollektivierungen zu zeigen, wird vermutlich unter der mit der Konzeption von Komanenz und Immanenz verbundenen Perspektive einer eleganten Argumentation erschlossen.

Die Eigenschaft jeder gemäss (1.1)-(1.3) beschaffenen Flussfunktion Ψ binnen einer als Zustandsraum aufgefassten Teilmenge $\zeta \subset \mathbb{R}^n$, dass es für alle Paare $(t, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ eine positive reelle Zahl δ von der Art gibt, dass für alle Paare von Zuständen $(x, y) \in \zeta$ die Implikation

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|\Psi(x, t) - \Psi(y, t)\| < \varepsilon \quad (2.2)$$

wahr ist, nennen wir genau dann, wenn die Gültigkeit dieser Implikation gegeben ist, die Komanenz der Flussfunktion Ψ . Die Komanenz ist demnach eine spezielle Form der Stetigkeit.² Dass wir diese als Komanenz bezeichnen, liegt daran, dass die Trajektorien der Kollektivierung $[\Psi]$ einer komanenten Flussfunktion Ψ in dem Sinn beieinander bleiben, ko-manieren, den diese Definition der Komanenz präzisiert. Ferner ordnet diese Definition die Komanenz zwar zunächst einer jeweiligen Flussfunktion und nicht etwa der Kollektivierung $[\Psi]$ der jeweiligen Flussfunktion zu. Wir können aber auch jeder Kollektivierung $[\Psi]$ einer jeweiligen Flussfunktion Ψ binnen $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ gegebenenfalls deren Komanenz oder aber deren Nicht-Komanenz als Eigenschaft zuordnen, die die Kollektivierung $[\Psi]$ entweder hat oder aber nicht. Und in diesem Gebrauch ist die Komanenz die Eigenschaft eines Mengensystemes von Trajektorien und nicht die Eigenschaft einer Abbildung, sodass sie dann nur indirekt als eine Form der Stetigkeit aufgefasst werden kann. Das, der Kollektivierung $[\Psi]$ die Komanenz zuzuordnen, ist deshalb möglich, weil für alle Flussfunktionen Ξ_1 und Ξ_2 , für die

$$[\Xi_1] = [\Xi_2] = [\Psi]$$

²Und zwar eine, die wir für alle diejenigen Funktionen Φ auf naheliegende Weise verallgemeinern können, für die es Menge A gibt, für die $\Phi \in A^{A \times \mathbb{R}}$ gilt, wobei A die durch eine auf A erklärte Metrik d_A mit der durch diese Metrik induzierten Topologie $\mathbf{T}(d_A)$ topologisiert ist. Wir können diese Stetigkeitsform aber auch für alle Funktionen $\Phi \in A^{A \times \mathbb{R}}$ generalisieren, für die es Menge A gibt, die durch eine nicht notwendigerweise metrische Topologie $\mathbf{T}(A)$ topologisiert ist. Sowohl dieser naheliegenden metrischen Formulierung der Komanenz als auch deren weiteren Generalisierung gehen wir hier nicht nach, weil diese jenseits der programmatischen Elementarität dieses Traktates liegt.

gilt, die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
& \left(\forall (t, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall (x, y) \in \bigcup[\Psi] \right. \\
& \quad \left. \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|\Xi_1(x, t) - \Xi_1(y, t)\| < \varepsilon \right) \\
& \quad \Leftrightarrow \\
& \left(\forall (t, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall (x, y) \in \bigcup[\Psi] \right. \\
& \quad \left. \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|\Xi_2(x, t) - \Xi_2(y, t)\| < \varepsilon \right)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

wahr ist: Eine Flussfunktion ist genau dann komanent, wenn ihre Kollektivierung komanent ist und ein Kollektiv ist genau dann komanent, wenn es eine komanente Flussfunktion gibt, deren Kollektivierung jenes Kollektiv ist. Der Begriff der Komanenz ist für jedwede reelle Flussfunktion entworfen. Den Begriff sowohl der punktwisen als auch der globalen Immanenz hingegen entwerfen wir nur für spezielle Flussfunktionen, nämlich für normale Flussfunktionen. Jede Flussfunktion Ξ binnen einer durch eine jeweilige Topologie \mathbf{T} topologisierten Menge X bezeichnen wir als bezüglich der Topologie \mathbf{T} genau dann normal, wenn diese Flussfunktion Ξ in ihrer zweiten Veränderlichen stetig ist bezüglich der natürlichen Topologie des Zahlenstrahles $\mathbf{T}(1)$ und bezüglich jener Topologie \mathbf{T} , die den jeweiligen Zustandsraum X topologisiert. Das heisst, dass genau dann, wenn Ξ bezüglich der Topologie \mathbf{T} normal ist, für alle $x \in X$

$$\Xi(x, \text{id}) \in \mathcal{C}_{\mathbf{T}(1), \mathbf{T}}(\mathbb{R}, X) \tag{2.4}$$

gilt. Wir können den Begriff insensitiver Eichbarkeit für jede Zustandsraumtopologisierung analog zu (1.12) verfassen. Die Normalität einer Flussfunktion impliziert nicht, dass sie insensitiv eichbar ist. Dementsprechend meinen wir genau dann, wenn wir eine Flussfunktion Ψ binnen einer Teilmenge $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ eines reellen Raumes der Dimension $n \in \mathbb{N}$ unattribuiert als normal bezeichnen, dass Ψ bezüglich der Topologie $\mathbf{T}(n)$ normal ist, wobei $\mathbf{T}(n)$ die natürliche Topologie des \mathbb{R}^n ist.

Als die punktweise Immanenz einer normalen, d.h., in ihrer zweiten Veränderlichen stetigen, Flussfunktion Ψ binnen $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir gegebenenfalls deren Eigenschaft, dass für jede Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und einen Zustand $x \in \zeta$ eine Zahl $T \in \mathbb{R}^+$ von der Art existiert, dass die Menge

$$\mathbb{B}_\varepsilon(0) + \Psi(x, [-T, T])$$

die gesamte Trajektorie $\Psi(x, \mathbb{R})$ enthält. Und zwar sei dies die punktweise Immanenz der Flussfunktion Ψ im Zustand x .

Die Menge $\mathbb{B}_\varepsilon(0) + \Psi(x, [-T, T])$ können wir uns als einen Schlauch vom Durchmesser 2ε vorstellen, der von zwei Kugelhappen ebendesselben Durchmessers verschlossen ist, und dessen Achse hierbei der Trajektorienabschnitt $\Psi(x, [-T, T])$ ist – falls ε oder T hinreichend klein sind. Was wir uns als den imaginativen Sachverhalt vorstellen, dass dieser Schlauch um den Trajektorienabschnitt $\Psi(x, [-T, T]) \subset \Psi(x, \mathbb{R})$ die gesamte Trajektorie $\Psi(x, \mathbb{R})$ enthält, ist in der Inklusion

$$\mathbb{B}_\varepsilon(0) + \Psi(x, [-T, T]) \supset \Psi(x, \mathbb{R}) \quad (2.5)$$

formuliert. Als die globale Immanenz einer normalen Flussfunktion Ψ binnen $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir gegebenenfalls genau diesen Sachverhalt, dass die folgende Aussage für Ψ gilt: Für jede positive reelle Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert eine andere positive reelle Zahl $T \in \mathbb{R}^+$ von der Art, dass für alle Zustände $x \in \bigcup[\Psi]$ die Inklusion (2.5) gilt.

Dass die punktweise Immanenz einer jeden normalen Flussfunktion Ψ binnen $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ gegeben ist, deren Zustandsraum ζ beschränkt ist, sehen wir leicht:

Weil ζ beschränkt ist, ist die abgeschlossene Hülle der Trajektorie $\mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R}))$ kompakt für jeden Zustand $x \in \zeta$. Für jede positive reelle Zahl ε gibt es eine Folge $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ von der Art, dass die Vereinigung

$$\bigcup \left\{ \mathbb{B}_\varepsilon(\Psi(x, t_j)) : j \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.6)$$

dieses Kompaktum $\mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R}))$ überdeckt. Der Satz von Heine-Borel sagt uns daher, dass eine endliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ existiert, für die die Inklusion

$$\bigcup \left\{ \mathbb{B}_\varepsilon(\Psi(x, t_j)) : j \in I \right\} \supset \mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R})) \quad (2.7)$$

gilt. Und daher existiert auch ein Intervall $[-t(\varepsilon), t(\varepsilon)]$ von der Art, dass für alle $j \in I$ die eindimensionale Lokalisierung

$$t_j \in [-t(\varepsilon), t(\varepsilon)] \quad (2.8)$$

wahr ist. Wir können die hier via einer Flussfunktion Ψ definierten Trajektorien $\Psi(x, \mathbb{R})$ aus dem Zusammenhang mit einer Flussfunktion Ψ befreien:

Jede stetige Abbildung ϑ des Zahlenstrahles in eine Menge $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ des \mathbb{R}^n mit endlicher Dimension $n \in \mathbb{N}$ hat offenbar eine Wertemenge $\mathbf{P}_2\vartheta = \vartheta(\mathbb{R})$, die insofern eine Verallgemeinerung einer Trajektorie ist: Jede Trajektorie ist zwar ein derartiges stetiges Zahlenstrahlbild $\vartheta(\mathbb{R})$. Es ist aber nicht jedes solche Zahlenstrahlbild $\vartheta(\mathbb{R})$ eine Trajektorie. Denn das stetige Zahlenstrahlbild $\vartheta(\mathbb{R})$ kann im Gegensatz zu einer Trajektorie so beschaffen sein, dass es sich selbst durchdringt. Wegen der Stetigkeit der Abbildung ϑ gibt es nur endlich viele Punkte der Wertemenge $\vartheta(\mathbb{R})$, in denen sich das Zahlenstrahlbild $\vartheta(\mathbb{R})$ selbst durchdringt, falls dasselbe beschränkt ist. Daher ist es dann als eine Projektion einer Trajektorie eines höher- jedoch endlichdimensionalen Raumes \mathbb{R}^m auffassbar. Vor diesem Hintergrund nennen wir alle der beschriebenen stetigen Zahlenstrahlbilder $\vartheta(\mathbb{R})$ – auch die nicht beschränkten – projektive Trajektorien. Jede beschränkte projektive Trajektorie $\vartheta(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^n$ ist offenbar immanent in diesem Sinn, dass für alle positiven und reellen Zahlen ε und für alle ihre Punkte $x \in \vartheta(\mathbb{R})$ eine Art Schlauch $\mathbb{B}_\varepsilon(0) + \vartheta(I)$ um einen Abschnitt $\vartheta(I) \ni x$ existiert, welcher die gesamte projektive Trajektorie $\vartheta(\mathbb{R})$ enthält, wobei der Trajektorienabschnitt $\vartheta(I)$ endliche Länge hat, weil $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall sein soll. Wir erkennen die für alle projektiven Trajektorien $\vartheta(\mathbb{R})$ gültige Äquivalenz von deren jeweiliger Immanenz im beschriebenen Sinn und deren jeweiliger Beschränktheit.

Die Beschränktheit des Zustandsraumes ζ jeder normalen Flussfunktion Ψ binnen ζ ist also ein hinreichendes, aber offenbar kein notwendiges Kriterium dafür, dass die stetige Flussfunktion Ψ – oder gleichermassen ihre Kollektivierung $[\Psi]$ – global immanent ist: Denn die globale Immanenz einer Flussfunktion Ψ ist die punktweise Immanenz aller Trajektorien ihrer Kollektivierung $[\Psi]$, wie die vorangegangene Betrachtung beschränkter projektiver Trajektorie deutlich macht, sodass folgendes Pendant zu der Äquivalenz (2.3) formulierbar ist: Für alle normalen Flussfunktionen Ξ_1 und Ξ_2 , für die

$$[\Xi_1] = [\Xi_2] = [\Psi]$$

gilt, gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \left(\forall (x, \varepsilon) \in \bigcup [\Psi] \times \mathbb{R}^+ \exists T \in \mathbb{R}^+ \right. \\ & \left. \mathbb{B}_\varepsilon(0) + \Xi_1(x, [-T, T]) \supset \Xi_1(x, \mathbb{R}) \right) \\ & \Leftrightarrow \\ & \left(\forall (x, \varepsilon) \in \bigcup [\Psi] \times \mathbb{R}^+ \exists T \in \mathbb{R}^+ \right. \\ & \left. \mathbb{B}_\varepsilon(0) + \Xi_2(x, [-T, T]) \supset \Xi_2(x, \mathbb{R}) \right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Eine normale Flussfunktion ist genau dann global immanent, wenn ihre Kollektivierung global immanent ist und ein Kollektiv ist genau dann global immanent, wenn es eine global immanente Flussfunktion gibt, deren Kollektivierung es ist.

Ist die Flussfunktion Ψ global immanent, so existiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} a_\Psi : \zeta \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ , \\ (x, \varepsilon) &\mapsto a_\Psi(x, \varepsilon) , \end{aligned} \quad (2.10)$$

wobei wir die Zahl

$$a_\Psi(x, \varepsilon) := \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_0^+ : \Psi(x, [-t, t]) + \mathbb{B}_\varepsilon(0) \subset \Psi(x, \mathbb{R}) \right\} \quad (2.11)$$

naheliegender Weise als die Immanenzzeit für jedes jeweilige Paar $(x, \varepsilon) \in \zeta \times \mathbb{R}^+$ bezeichnen. Wenn die Abbildung $a_\Psi(\text{id}, \varepsilon)$ stetig ist, so existiert, wenn der Zustandsraum ζ zudem kompakt ist, sogar die Zahl

$$A_\Psi(\varepsilon) := \max \left\{ a_\Psi(x, \varepsilon) : x \in \zeta \right\} , \quad (2.12)$$

eine ε -Immanenzzeit. Und wenn $a_\Psi(\text{id}, \varepsilon)$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ stetig ist, so existiert demnach sogar eine pauschale Immanenzfunktion

$$\begin{aligned} A_\Psi : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ , \\ \varepsilon &\mapsto A_\Psi(\varepsilon) . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Es gelingt uns, zu zeigen, dass für eine \mathcal{C}^1 -Flussfunktion Ψ , deren Zustandsraum ζ beschränkt ist, die Funktion $a_\Psi(\text{id}, \varepsilon)$ stetig ist für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, wenn wir von der Komanenz der Flussfunktion Ψ ausgehen können, deren Ableitung nach der zweiten Veränderlichen $\partial_2 \Psi$ stetig ist. Für sie gibt es die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} : \zeta &\rightarrow \mathbb{R}^n , \\ x &\mapsto \hat{\Psi}(x) := \partial_2 \Psi(x, 0) , \end{aligned} \quad (2.14)$$

sodass auch die Abbildung

$$\begin{aligned} \zeta \times \zeta &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ , \\ (x, y) &\mapsto \|\hat{\Psi}(x) - \hat{\Psi}(y)\| \end{aligned} \quad (2.15)$$

stetig ist und deren Maximum

$$\Theta(\varepsilon) := \max \left\{ \|\hat{\Psi}(x) - \hat{\Psi}(y)\| : x, y \in \zeta \wedge \|x - y\| \leq \varepsilon \right\} \quad (2.16)$$

für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert. Daher gibt es eine entsprechende Abbildung Θ mit der Definitionsmenge $\mathbf{P}_1\Theta = \mathbb{R}^+$, deren Wertemenge im positiven Zahlenstrahl \mathbb{R}^+ liegt, und deren jeweilige Werte $\Theta(\varepsilon)$ sind. Diese Funktion Θ ist offensichtlich stetig. Und offenbar wächst sie monoton, wobei $\Theta(\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ verschwindet. Θ bleibt aber für

$$\varepsilon \geq \sup\{\|x - y\| : x, y \in \zeta\}$$

konstant, weshalb Θ von einer streng monotonen differenzierbaren Funktion auf dem Intervall

$$[0, \sup\{\|x - y\| : x, y \in \zeta\}]$$

von oben beschränkt wird, deren Ableitung auf ihrer Wertemenge den Maximalwert annimmt. Also gibt es einen Flussexponenten $\kappa(\Psi) \in \mathbb{R}^+$ als die kleinste positive reelle Zahl, für die für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$$\Theta(\varepsilon) \leq \kappa(\Psi) \varepsilon \quad (2.17)$$

gilt. Also ist für alle $x, y \in \zeta, t \in \mathbb{R}^+$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|\Psi(x, t) - \Psi(y, t)\| \\ & \leq \|x - y\| + \int_0^t \|\hat{\Psi}(x, s) - \hat{\Psi}(y, s)\| ds \\ & \leq \|x - y\| + \kappa(\Psi) \int_0^t \|\Psi(x, s) - \Psi(y, s)\| ds \end{aligned}$$

wahr. Die folgende Annahme beinhaltet offenbar einen Widerspruch: Die Annahme, dass es für eine stetige Funktion α mit der Definitionsmenge $\mathbf{P}_1\alpha = \mathbb{R}^+$, deren Wertemenge im positiven Zahlenstrahl \mathbb{R}^+ liegt, eine positive reelle Zahl T gibt, für die für alle $t \in [0, T]$ die Gleichung

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \kappa(\Psi) \int_0^t \alpha(s) ds$$

gilt und dass dabei einerseits die Beschränkung

$$\alpha(0) \geq \|x - y\|$$

eingehalten ist, aber andererseits eine Zahl t^* in dem Intervall $[0, T]$ existiert, für die die Beschränkung

$$\alpha(t^*) \leq \|\Psi(x, t^*) - \Psi(y, t^*)\|$$

zutritt. Also ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \zeta$ die Ungleichung

$$\|\Psi(x, t) - \Psi(y, t)\| \leq \|x - y\| \exp(\kappa(\Psi)t) \quad (2.18)$$

erfüllt.

Es sei f ein Homöomorphismus zwischen endlichdimensionalen reellen Räumen. Wenn dieser Homöomorphismus auf dem Zustandsraum $\bigcup \Gamma$ einer trajektorialen \mathcal{C}^1 -Partition Γ eines Kompaktums eines endlichdimensionalen reellen Raumes Lipschitz-stetig ist, wenn also eine Schranke $K \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$K := \sup \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} : x, y \in \bigcup \Gamma \right\}, \quad (2.19)$$

so ist das Bild $f(\Gamma) = \{f(\tau) : \tau \in \Gamma\}$ ein Kollektiv, das komanent ist. Wenn Ψ eine stetige Flussfunktion ist, deren Kollektivierung $[\Psi]$ mit der trajektorialen Partition Γ übereinstimmt und wenn Ψ dabei den Flussexponenten $\kappa(\Psi) \in \mathbb{R}^+$ hat, so gibt es zu dem Bildkollektiv $f(\Gamma)$ also die Flussfunktion $f \circ \Psi$, deren Kollektivierung

$$[f \circ \Psi] = f([\Psi]) = f(\Gamma)$$

dieses Bildkollektiv $f(\Gamma)$ ist. Die Flussfunktion $f \circ \Psi$ hat dabei den Flussexponenten

$$\log(K) + \kappa(\Psi) = \kappa(f \circ \Psi). \quad (2.20)$$

Zeigen wir nun die

Bemerkung 2.1.1: Die Unvereinbarkeit der Komanenz mit der Existenz unstetiger Immanenzfunktionen

Die Immanenzfunktion a_Ψ jeder komanenten und punktweise immanenten Flussfunktion Ψ ist stetig.

Beweis:

Es sei

$$\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \zeta^{\mathbb{N}}$$

eine gegen $z \in \zeta$ konvergente Punktfolge. Existierte eine positive reelle Zahl $\tau \in \mathbb{R}^+$ von der Art, dass für eine positive reelle Zahl $\delta \in \mathbb{R}^+$ die Ungleichung

$$a_\Psi(z_j, \delta) \leq a_\Psi(z, \delta) - \tau$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ gälte, so gäbe es zum einen eine reelle Zahl

$$t(z) \in \mathbb{R} \setminus \bigcup \{a_\Psi(z_j, \delta) \cdot [-1, 1] : j \in \mathbb{N}\}$$

und zum anderen eine positive reelle Zahl η , für die für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\Psi(z, t(z)) \notin \Psi\left(z, \bigcup_{j \in \mathbb{N}} a_\Psi(z_j, \delta) \cdot [-1, 1]\right) + \mathbb{B}_{\delta+3\eta}(0)$$

gälte. Wegen der Kommanenz der Flussfunktion Ψ gäbe es dabei eine natürliche Zahl $j^* \in \mathbb{N}$ von der Art, dass auch die Ungleichung

$$||\Psi(z_j, t_z) - \Psi(z, t_z)|| < \eta \quad (2.21)$$

für alle $j > j^*$ zuträfe, sodass für alle $j > j^*$ die Inklusionenkette

$$\begin{aligned} \Psi\left(z, \bigcup_{j \in \mathbb{N}} a_\Psi(z_j, \delta) \cdot [-1, 1]\right) + \mathbb{B}_{\delta+3\eta}(0) &\supset \\ \Psi\left(z_j, a_\Psi(z_j, \delta) \cdot [-1, 1]\right) + \mathbb{B}_{\delta+\eta}(0) &\supset \\ \Psi(z_j, \mathbb{R}) + \mathbb{B}_\eta(0) \end{aligned}$$

gälte. Der Zustand $\Psi(z, t(z))$ könnte demnach nicht nur kein Element der Trajektorie $\Psi(z_j, \mathbb{R})$ sein, wenn $j > j^*$ ist; er könnte darüber hinaus auch nicht in der Menge $\Psi(z_j, \mathbb{R}) + \mathbb{B}_\eta(0)$ sein, was im Widerspruch zu der Ungleichung (2.21) steht.

Existierte hingegen eine positive reelle Zahl $\tau \in \mathbb{R}^+$ von der Art, dass für eine positive reelle Zahl $\delta \in \mathbb{R}^+$ die Ungleichung

$$a_\Psi(z_j, \delta) \geq a_\Psi(z, \delta) + \tau$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ gälte, so gäbe es reelle Zahlen

$$t(z_j) \in \bigcap \{a_\Psi(z_j, \delta) \cdot [-1, 1] : j \in \mathbb{N}\} \setminus (a_\Psi(z, \delta) \cdot [-1, 1]) \quad (2.22)$$

und eine positive reelle Zahl η , für die für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\Psi(z_j, t(z_j)) \notin \Psi(z, a_\Psi(z, \delta) \cdot [-1, 1]) + \mathbb{B}_{\delta+2\eta}(0) \quad (2.23)$$

gälte, wobei es wegen der Komanenz der Flussfunktion Ψ eine natürliche Zahl $j^\star \in \mathbb{N}$ von der Art gäbe, dass für alle $j > j^\star$ die Ungleichung (2.21) zuträfe. Wegen derselben gälte daher die Inklusionskette

$$\begin{aligned} \Psi(z, a_\Psi(z, \delta) \cdot [-1, 1]) + \mathbb{B}_{\delta+2\eta}(0) &\supset \\ \Psi(z, \mathbb{R}) + \mathbb{B}_{2\eta}(0) &\supset \\ \Psi(z, t(z_j) \cdot [-1, 1]) + \mathbb{B}_{2\eta}(0) &\supset \\ \Psi(z_j, t(z_j) \cdot [-1, 1]) \ni \Psi(z_j, t(z_j)) & \end{aligned}$$

für alle $j > j^\star$, was aber der Annahme der Existenz der Zahlen $t(z_j)$, für welche die Aussagen (2.22) und (2.23) gelten, widerspricht: Wenn die Zustandsfolge $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ gegen z konvergiert, konvergiert auch die Zahlenfolge $\{a_\Psi(z_j, \delta)\}_{j \in \mathbb{N}}$ gegen die Zahl $a_\Psi(z, \delta)$.

q.e.d.

Offensichtlich können komanente und punktweise immanente Flussfunktionen Ψ durchaus insensitive Kollektivierungen haben. Wenn der Zustandsraum ζ kompakt ist, gibt es also eine pauschale Immanenzfunktion A_Ψ von der Art, dass die Inklusion

$$\Psi(x, A_\Psi(\delta) \cdot [-1, 1]) + \mathbb{B}_\delta(0) \supset \Psi(x, \mathbb{R}) \quad (2.24)$$

für alle Zustände $x \in \zeta$ wahr ist. Neben der Immanenzfunktion A_Ψ existiert die Funktion b_Ψ auf ihrer Definitionsmenge $\mathbf{P}_1 b_\Psi =]0, \infty[\times]0, \infty[$ mit den jeweiligen Werten

$$\begin{aligned} b_\Psi(\delta, t) := \sup \left\{ \|x - y\| : x, y \in \zeta \wedge \right. \\ \left. s \in [-t, t] \Rightarrow \|\Psi(x, s) - \Psi(y, s)\| \leq \delta \right\} \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \quad (2.25)$$

die wir naheliegender Weise die Komanenzfunktion der Flussfunktion Ψ nennen. Darüber hinaus existiert die Funktion B_Ψ auf \mathbb{R}^+ mit der Definitionsmenge $\mathbf{P}_1 B_\Psi = \mathbb{R}^+$, deren Wertemenge im positiven Zahlenstrahl \mathbb{R}^+ liegt und deren jeweilige Werte für alle Zahlen δ ihrer Definitionsmenge

$$B_\Psi(\delta) := b_\Psi(\delta/3, A_\Psi(\delta/3)) \quad (2.26)$$

seien. Diese abgewandelte Kommanenzfunktion B_Ψ ist nun aber so beschaffen, dass für alle Zustände $x, y \in \zeta$ und für alle positiven reellen Zahlen δ die Implikation

$$\begin{aligned} ||x - y|| \leq B_\Psi(\delta) \quad \wedge \quad t \in A_\Psi(\delta/3) \cdot [-1, 1] \Rightarrow \\ ||\Psi(x, t) - \Psi(y, t)|| \leq \delta/3 \end{aligned} \quad (2.27)$$

wahr ist. Also sind die beiden Inklusionen

$$\Psi(x, \mathbb{R}) \subset \mathbb{B}_{\delta/3}(0) + \Psi(x, A_\Psi(\delta/3) \cdot [-1, 1])$$

und

$$\Psi(y, \mathbb{R}) \subset \mathbb{B}_{\delta/3}(0) + \Psi(y, A_\Psi(\delta/3) \cdot [-1, 1])$$

wahr, weshalb die Abschätzung

$$\sup \left\{ \inf \left\{ ||\Psi(x, s) - \Psi(y, t)|| : t \in \mathbb{R} \right\} : s \in \mathbb{R} \right\} \leq \delta$$

für alle $x, y \in \zeta$ mit

$$||x - y|| \leq B_\Psi(\delta)$$

gilt. Daher gilt aber auch die Implikation

$$y \in \mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R})) \Rightarrow \Psi(y, \mathbb{R}) \subset \mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R})) ,$$

also sogar die Implikation

$$y \in \mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R})) \Rightarrow \mathbf{cl}(\Psi(y, \mathbb{R})) = \mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R})) .$$

Demnach haben wir in der Relation

$$N_{[\Psi]} := \left\{ (x, y) \in \zeta \times \zeta : y \in \mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R})) \right\} \quad (2.28)$$

eine in $\zeta \times \zeta$ enthaltene Äquivalenzrelation des Zustandsraumes ζ gefunden. Und exakt diese Äquivalenzrelation (2.28) nennen wir die Näherrelation der Flussfunktion Ψ . Exakt die Elemente ihrer Quotientenmenge

$$\Xi \in [\zeta : N_{[\Psi]}] =: [[\Psi]] \quad (2.29)$$

nennen wir die Zimmer der Flussfunktion Ψ . Offensichtlich gilt dabei die Äquivalenz

$$x \in \Xi \in [[\Psi]] \Leftrightarrow \Xi = \mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R})) . \quad (2.30)$$

Exakt jede Partition $[[\Psi]]$ des Zustandsraumes in Zimmer $\Xi \in [[\Psi]]$ nennen wir gegebenenfalls die natürliche Partition der jeweiligen Flussfunktion Ψ . Der Befund, dass die Näherrelation $N_{[\Psi]}$ existiert und daher deren Quotientenmenge

$$[[\Psi]] = \left\{ \mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R})) : x \in \mathbf{P}_2\Psi \right\} \in \mathbf{part}(\mathbf{P}_2\Psi) \quad (2.31)$$

den Zustandsraum $\mathbf{P}_2\Psi$ partitioniert, zeigt sich dem Auge der Anschauung offenbar als eine Gegebenheit, die eigentlich durch die Beschaffenheit alleine des Kollektives $[\Psi]$ bedingt sein muss und nicht etwa bloss durch die Beschaffenheit spezieller Flussfunktionen, deren Kollektivierung $[\Psi]$ ist. Die Besinnung auf die Äquivalenzen (2.3) und (2.32) begründet den Eindruck, der sich für unsere Anschauung ergibt. Es ist daher gerechtfertigt, dass wir die Näherrelation $N_{[\Psi]}$ mit dem Kollektiv $[\Psi]$ indizieren, statt mit einer Flussfunktion. Die Indizierung mit einer Flussfunktion haben wir aber bei der punktweisen Imanenzfunktion a_Ψ , der pauschalen Imanenzfunktion A_Ψ , der Konanzenzfunktion b_Ψ und schliesslich der Begleitfunktion B_Ψ zu nehmen, weil für ein komanent-immanent-beschränktes Trajektorienkollektiv $[\Psi]$ und für zwei normale Flussfunktionen Ξ_1 und $\Xi_2 \neq \Xi_1$, die komanent-immanent sind und für die

$$[\Xi_1] = [\Xi_2] = [\Psi]$$

gilt, im allgemeinen die Differenzen

$$\begin{aligned} a_{\Xi_1} &\neq a_{\Xi_2} , \\ A_{\Xi_1} &\neq A_{\Xi_2} , \\ b_{\Xi_1} &\neq b_{\Xi_2} , \\ B_{\Xi_1} &\neq B_{\Xi_2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

vorliegen.

Zimmer partitionieren also den Zustandsraum jedes komanent-immanenten Trajektorienkollektives, dessen Zustandsraum $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge eines endlichdimensionalen und reellen Raumes \mathbf{R}^n ist, dessen Dimension $n \in \mathbb{N}$ endlich ist. Wir fragen uns da natürlicherweise, welche ergodentheoretische Verhältnisse in Räumen vorliegen, die nicht endlichdimensional sind und ausserdem, ob die beschränkten Teilmengen $\zeta \subset \mathbb{R}^n$, die Zustandsräume komanent-immanenter Trajektorienkollektive sind, kompakt sein müssen.

Der beschränkte Zustandsraum $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ eines komanent-immanenten Trajektorienkollektives $[\Psi]$ ist zwar die Vereinigung

$$\zeta = \bigcup [[\Psi]] ,$$

d.h., derjeniger Kompakta $\Xi \in [[\Psi]]$, die die Zimmer sind. Aber auf dem beschränkten und offenen Zustandsraum $]0, 1[$ ist beispielsweise $\{\{x\} : x \in]0, 1[\}$ ein komanent-immanentes Trajektorienkollektiv.

Der Frage nach den ergodentheoretischen Verhältnissen in Räumen, deren Dimension nicht endlich ist, gehen wir hier nicht nach. Diese Frage ist dabei eine Spezifizierung der weit allgemeineren Frage nach Verallgemeinerungen der Zimmer für irgendwelche topologische Räume. Und zu dieser sehr allgemeinen Frage können wir allerdings schon jetzt, ausgehend von der Beobachtung, dass die natürliche Partition eine topologische Invariante ist, dies sagen: Die natürliche Partition eines komanent-immanenten Trajektorienkollektives $[\Psi]$, dessen Zustandsraum $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, ist insofern eine topologische Invariante, als für jeden topologischen Raum $(\bigcup \mathbf{T}, \mathbf{T})$ und für jeden Homöomorphismus f , der zwischen demselben und dem Zustandsraum $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ besteht, mit

$$f \in \mathcal{C}_{\mathbf{T}(n), \mathbf{T}}(\zeta, \bigcup \mathbf{T}) \quad (2.33)$$

offenbar die Gültigkeit der Implikation

$$\Xi \in [[\Psi]] \Rightarrow f(\Xi) \in [[f \circ \Psi]] \in \mathbf{part}(\bigcup [[f \circ \Psi]]) \quad (2.34)$$

bedingt ist, wobei

$$f(\Xi) = \{f(x) : x \in \Xi\}$$

ein jeweiliges Bildzimmer ist, wenn Ξ ein Zimmer ist. Denn sowohl die Partitivität eines Mengensystemes als auch die Abgeschlossenheit einer Menge ist eine topologische Invariante. Damit kommen wir zu einer sehr allgemeinen ergodentheoretischen Aussage und passen unsere Begriffe deren Generalität an, indem wir folgende Vereinbarung treffen: Für jeden topologischen Raum $(\bigcup \mathbf{T}, \mathbf{T})$ nennen wir jedes Mengensystem

$$\Theta \subset \bigcup \mathbf{T}$$

genau dann ein Trajektorienkollektiv, wenn es einen gemäss (2.33) beschaffenen Homöomorphismus f gibt, ferner eine natürliche Zahl n und einen

Zustandsraum $\zeta \subset \mathbb{R}^n$ einer Flussfunktion Ψ binnen desselben, die so beschaffen sind, dass dieses Mengensystem

$$\Theta = \{f(\Psi(x, \mathbb{R}) : x \in \zeta) = \left\{ \{f(y) : y \in \Psi(x, \mathbb{R})\} : x \in \zeta \right\} \quad (2.35)$$

ist. Genau dann, wenn dabei ζ beschränkt ist, nennen wir das Trajektorienkollektiv Θ beschränkt. Genau dann, wenn es eine komanent-immanente Flussfunktion Ψ gibt, für die (2.35) zutrifft, nennen wir das Trajektorienkollektiv Θ komanent-immanent. Die Elemente der Partition $f(\Xi) \in [[f \circ \Psi]]$ in (2.34) nennen wir dabei die Zimmer der natürlichen Partition $[[f \circ \Psi]]$. Jedes solche komanent-immanent-beschränkte Trajektorienkollektiv ist ein homöomorphes Bild einer trajektoriellen \mathcal{C}^1 -Partition eines Kompaktums eines endlichdimensionalen reellen Raumes.

Zimmer sind ihrer Natur nach kompakt und sie liegen im jeweiligen Zustandsraum ξ separiert. Sie enthalten keine singuläre Trajektorie $\{x\} \subset \xi$, ohne dieselbe zu sein, denn singuläre Trajektorien sind offensichtlich selber Zimmer. Also haben sie nach Brouwers Fixpunktsatz nie das Geschlecht eins. Bekanntlich gilt für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ im allgemeinen *nicht*, dass die Implikation

$$\text{cl}(A) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \text{cl}(B) \cap A \neq \emptyset$$

wahr ist, auch nicht, wenn A und B speziell Trajektorien sind und wenn dabei die Dimension $n > 1$ ist. Gerade aber das ist anders, wenn A und B spezielle Teilmengen eines endlichdimensionalen und reellen Raumes sind, nämlich die Trajektorien eines speziellen, nämlich eines immanent-komanenten Trajektorienkollektives in einem beschränkten Zustandsraum.

Wir heben unser Resultat heraus:

2.1.2 Der Satz von der Existenz der Zimmer:

Der Zustandsraum eines jeden beschränkten, komanent-immanenten Trajektorienkollektives ist partitioniert in die abgeschlossenen Hüllen seiner Trajektorien.

Trivial, aber wichtig ist nun, dass für beschränkte Trajektorien $\tau \subset \mathbb{R}^n$ keineswegs genau dann

$$\text{cl}(\tau) = \tau$$

ist, wenn die beschränkte Trajektorie τ geschlossen ist, d.h., wenn sie zu dem Kreis \mathbb{S}^1 relativ homöomorph ist. Diese Äquivalenz von Geschlossenheit

und Abgeschlossenheit gilt aber, wenn τ ein Element einer trajektoriellen \mathcal{C}^1 -Partition eines Kompaktums eines endlichdimensionalen reellen Raumes ist. Die Wichtigkeit dieser Äquivalenz von Geschlossenheit und Kompaktheit einer beschränkten Trajektorie einer trajektoriellen \mathcal{C}^1 -Partitionen eines Kompaktums eines endlichdimensionalen reellen Raumes ist, dass alle nicht geschlossenen Trajektorien einer solchen trajektoriellen Partition in nicht-trivialen Zimmern $\mathbf{cl}(\tau)$ mit

$$\mathbf{cl}(\tau) \setminus \tau \neq \emptyset \quad (2.36)$$

liegen. Dabei gibt es bekanntlich trajektorielle \mathcal{C}^1 -Partitionen eines Kompaktums eines endlichdimensionalen reellen Raumes, deren Elemente nicht geschlossene Trajektorien sind.

Wir nennen für jede Flussfunktion Ψ mit der Komanenzfunktion b_Ψ und mit der Immanenzfunktion A_Ψ exakt die Funktion

$$B_\Psi := b_\Psi \left(\text{id}/3, A_\Psi(\text{id}/3) \right) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{R}^+} \quad (2.37)$$

die Begleitfunktion der Flussfunktion Ψ .

Diese Benennung liegt nahe, weil B_Ψ eine Art von Begleitung formuliert. Die Begleitfunktion B_Ψ quantifiziert nämlich diejenige Form von Begleitung, die objektivierbar ist als die Existenzaussage

$$\begin{aligned} \forall x, y \in [\bigcup \Psi], t \in \mathbb{R} \exists t(x, y, t) \in A_\Psi(\delta/3) \cdot [-1, 1] : \\ ||x - y|| < B_\Psi(\delta) \Rightarrow ||\Psi(x, t) - \Psi(y, t(x, y, t))|| < \delta, \end{aligned} \quad (2.38)$$

die von der Aussage zu unterscheiden ist, dass für alle $x, y \in [\bigcup \Psi]$, $t \in \mathbb{R}$ einfach die Implikation

$$||x - y|| < B_\Psi(\delta) \Rightarrow ||\Psi(x, t) - \Psi(y, t)|| < \delta \quad (2.39)$$

gilt, die im Allgemeinen *nicht* wahr ist: Im Vorausblick auf die Sensitivität nicht trivialer Zimmer betonen und erläutern wir ausführlich, welche Bewandnis es mit der Begleitfunktion B_Ψ der Flussfunktion Ψ hat: Wenn ein Zustand $y \in \zeta \subset \mathbb{R}^n$ des beschränkten Zustandsraumes ζ eines endlichdimensionalen und reellen Raumes \mathbb{R}^n von einem anderen Zustand $x \in \zeta$ weniger als $B_\Psi(\delta)$ entfernt ist, wobei δ eine positive reelle Zahl und Ψ eine komanent-immanente Flussfunktion ist und B_Ψ deren Begleitfunktion, so bleiben die jeweiligen Zustände $\Psi(y, \pm t)$ solange in einer Kugel des Radius δ um $\Psi(x, \pm t)$,

solange $t \in [0, A_\Psi(\delta/3)[$ ist, wobei A_Ψ die pauschale Kommanenzfunktion der Flussfunktion Ψ ist. Es gilt dann die Aussage

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{\delta/3}(0) + \Psi(x, A_\Psi(\delta/3) \cdot [-1, 1]) &\supset \downarrow [[\Psi]]_{\{x\}} \wedge \\ \mathbb{B}_{\delta/3}(0) + \Psi(y, A_\Psi(\delta/3) \cdot [-1, 1]) &\supset \downarrow [[\Psi]]_{\{y\}} \wedge \\ t \in [0, A_\Psi(\delta/3)] &\Rightarrow \|\Psi(x, \pm t) - \Psi(y, \pm t)\| < \delta/3 . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Der sich in den Zustand $\Psi(y, t)$ entwickelnde Zustand y begleitet also die *gesamte Trajektorie* $\Psi(x, \mathbb{R})$ insofern, als es für alle Zustände $\tilde{x} \in \Psi(x, \mathbb{R})$ einen Zustand $\Psi(y, t(\tilde{x})) \in \Psi(y, A_\Psi(\delta/3) \cdot [-1, 1])$ gibt, dessen Distanz $\|\tilde{x} - \Psi(y, t(\tilde{x}))\|$ kleiner als δ ist. Wegen (2.40) gilt die Implikation

$$\begin{aligned} \|x - y\| < B_\Psi(\delta) &\Rightarrow \\ \mathbb{B}_\delta(0) + \Psi(x, A_\Psi(\delta/3) \cdot [-1, 1]) &\supset [[\Psi]]_{\{x\}} \wedge \\ \mathbb{B}_\delta(0) + \Psi(x, A_\Psi(\delta/3) \cdot [-1, 1]) &\supset [[\Psi]]_{\{y\}} . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Für $t \in [0, A_\Psi(\delta/3)[$ ist der von der Trajektorie $\Psi(y, \mathbb{R})$ durchlaufene Zustand $\Psi(y, \pm t)$ in der Menge

$$\mathbb{B}_\delta(0) + \Psi(x, t \cdot [-1, 1]) ,$$

die zwar für einen hinreichend kleinen Radius δ zigarrenförmig ist, die aber im allgemeinen recht unförmig ist. Der Sachverhalt, dass die Aussage (2.40) für alle positiven reellen Zahlen δ gilt, impliziert, dass es das Zimmer $\downarrow [[\Psi]]_{\{x\}}$ gibt; und dieser Sachverhalt hat als Konsequenz, dass, falls $y \in \downarrow [[\Psi]]_{\{x\}}$ und $\|x - y\| < B_\Psi(\delta)$ zutrifft, die Implikation

$$\begin{aligned} y \in \mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R})) &\Rightarrow \\ [[\Psi]]_{\{x\}} = \mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R})) &= \mathbf{cl}(\Psi(y, \mathbb{R})) = [[\Psi]]_{\{y\}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

gilt. Die wichtige Konsequenz jenes Sachverhaltes ist also die Existenz der Zimmer, die der Implikation (2.42) gleichwertig ist. Falls die Bedingung

$$y \notin \Psi(x, \mathbb{R})$$

eingehalten ist, verlässt der von der Trajektorie $\Psi(y, \mathbb{R})$ durchlaufene Zustand $\Psi(y, \pm t)$ aber gegebenenfalles die Kugel

$$\mathbb{B}_{\delta/3}(\Psi(x, t))$$

wenn $t > A_\Psi(\delta/3)$ ist, gleich, ob der Zustand $y \notin \Psi(x, \mathbb{R})$ im Zimmer $\downarrow [[\Psi]]_{\{x\}}$ ist, in dem der Zustand x ist, oder nicht. Wenn dem nicht so wäre, wäre die dem Satz 2.2.2 gemässe Sensitivität nicht trivialer Zimmer nicht möglich, wie wir sehen werden.

Die Aussage (2.38) ist äquivalent zu folgender Aussage: Für alle Zustandsraumpunkte $x, y \in \bigcup[\Psi]$ und für alle positiven reellen Zahlen $\delta \in \mathbb{R}^+$ sind die folgenden Implikationen und Äquivalenzen

$$\left(\mathbb{B}_{B_\Psi(\delta)}(0) + \Psi(x, \mathbb{R}) \right) \cap \Psi(y, \mathbb{R}) \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\mathbb{B}_\delta(0) + \Psi(x, \mathbb{R}) \supset \Psi(y, \mathbb{R}) ,$$

$$\mathbb{B}_\delta(0) + \Psi(x, \mathbb{R}) \supset \Psi(y, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathbb{B}_\delta(0) + \Psi(y, \mathbb{R}) \supset \Psi(x, \mathbb{R}) ,$$

$$\mathbb{B}_\delta(0) + \Psi(y, \mathbb{R}) \supset \Psi(x, \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\mathbb{B}_\delta(0) + \mathbf{cl}(x(\mathbb{R})) \supset \mathbf{cl}(y(\mathbb{R}))$$

wahre Aussagen. Dies impliziert, dass für alle $x, y \in \bigcup[\Psi]$, $\delta \in \mathbb{R}^+$ die Implikation

$$\|x - y\| < B_\Psi(\delta) \Rightarrow D(\mathbf{cl}(x(\mathbb{R})), \mathbf{cl}(y(\mathbb{R}))) < \delta \quad (2.43)$$

gilt. Dabei ist D die Hausdorff-Distanz, eine Funktion mit der Definitionsmenge $2^{\mathbb{R}^n} \times 2^{\mathbb{R}^n}$, deren jeweiliger Wert für alle Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$

$$D(A, B) := \inf \left\{ \delta \in [0, \infty[: \mathbb{B}_\delta(0) + A \supset B \wedge \mathbb{B}_\delta(0) + B \supset A \right\} \quad (2.44)$$

ist. Die Wertemenge der Hausdorff-Distanz ist die Menge $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, weil das Infimum der leeren Menge mit ∞ identifiziert ist. Ferner finden wir die Äquivalenz

$$\mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R})) = \mathbf{cl}(\Psi(y, \mathbb{R})) \Leftrightarrow D(\Psi(x, \mathbb{R}), \Psi(y, \mathbb{R})) = 0 . \quad (2.45)$$

Die Restriktion $D|_{\mathbf{C}(n)}$ ist eine Metrik, wenn

$$\mathbf{C}(n) := \mathbf{C}(\mathbf{T}(n)) \quad (2.46)$$

das Mengensystem aller abgeschlossenen Mengen ist, die im \mathbb{R}^n liegen; wobei \mathbf{C} der universelle, auf der Klasse der Topologien definierte Operator sei, der jeder jeweiligen Topologie \mathbf{T} dasjenige Mengensystem $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ zuordnet,

das das Mengensystem aller bezüglich \mathbf{T} abgeschlossenen Mengen des zu \mathbf{T} gehörenden topologischen Raumes ist. Der jeweilige endlichdimensionale und reelle Raum \mathbb{R}^n sei dabei der, in dem auch alle Trajektorien des gerade betrachteten Kollektives $[\Psi]$ enthalten sind. Auch wenn die nicht restringierte Hausdorff-Distanz D keine Metrik ist, ist die Implikation (2.43) nichtsdestotrotz insofern eine Stetigkeitsaussage, als die restringierte Hausdorff-Distanz $D|_{\mathbf{C}(n)}$ sehr wohl eine Metrik ist.³ Es gilt also als Konsequenz der beschriebenen Begleitung eines komanent-immanenten Trajektorienkollektives $[\Psi]$ mit einem abgeschlossenen Zustandsraum

$$\mathbf{cl}(\bigcup[\Psi]) = \bigcup[\Psi]$$

dies: Genau dann, wenn eine Folge von Zuständen $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in (\bigcup[\Psi])^{\mathbb{N}}$ gegen den Zustand x konvergiert, der dann ja im abgeschlossenen Zustandsraum $\bigcup[\Psi]$ ist, wobei $\mathbf{cl}(\Psi(x, \mathbb{R}))$ ein Zimmer ist, konvergiert eine Zimmernfolge $\{\mathbf{cl}(x_j(\mathbb{R}))\}_{j \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Hausdorff-Metrik $D|_{\mathbf{C}(n)}$ gegen ein Zimmer der natürlichen Partition $[[\Psi]]$. Wir haben die folgende Bemerkung bereits bewiesen:

2.1.3 Bemerkung:

Die Vollständigkeit des Raumes von Zimmern

Ist $[\Psi]$ ein komanent-immanentes Trajektorienkollektiv, so ist das Paar

$$([\Psi], D)$$

genau dann ein vollständiger metrischer Raum, wenn der Zustandsraum

$$\mathbf{cl}(\bigcup[\Psi]) = \bigcup[\Psi]$$

abgeschlossen ist. D ist dabei die Hausdorff-Distanz, die von der euklidischen Metrik des \mathbb{R}^n , in dem das Trajektorienkollektiv $[\Psi]$ dargestellt ist, abgeleitet ist.

Dazu, dass $([\Psi], D)$ ein vollständiger metrischer Raum ist, braucht das komanent-immanente Trajektorienkollektiv $[\Psi]$ also nicht notwendigerweise einen beschränkten Zustandsraum $\bigcup[\Psi]$ zu haben.

³ Eine eingehendere Darstellung der Hausdorff-Distanz findet man in dem Lehrbuch [CigRei87].

Wir ergänzen die Bemerkung 2.1.3 ausserdem noch um die folgenden Hinweise: Der metrische Raum $(\mathbf{C}(n), D)$ ist zwar vollständig, er hat aber bekanntlich im generischen Fall keine abzählbare Basis, sodass er im generischen Fall kein polnischer Raum ist. (Zum Beispiel ist die Flussfunktion $\Phi \in [0, 1]^{[0, 1] \times \mathbb{R}}$ mit

$$\Phi(x, \mathbb{R}) = \{x\}$$

für alle $x \in [0, 1]$ so beschaffen, dass der dieser Flussfunktion Φ entsprechende Raum der Zimmer

$$([\Phi], D) = \left(\left\{ \{x\} : x \in [0, 1] \right\}, |\mathbf{P}_1 \downarrow - \mathbf{P}_2 \downarrow| \right)$$

ist. Wobei jede Basis dieses vollständigen metrischen Raumes dessen Trägermenge $\{\{x\} : x \in [0, 1]\}$ enthält, deren Kardinalität \aleph_1 , die Mächtigkeit des Kontinuums, ist. Der Operator \downarrow bezeichnet dabei das Element jeder jeweiligen einelementigen Menge.) Daher können auf der Grundlage des im allgemeinen nicht polnischen Raumes $([\Psi], D)$ stochastische Prozesse, die die übergeordnete Zufallsdynamik der Zimmer beschreiben, nicht in der üblichen Weise eingerichtet werden. Eine derartige übergeordnete Zufallsdynamik der Zimmer, die von der deterministischen Evolution, die die jeweiligen Zimmer prägt, unabhängig ist, modellierte dabei die externe statistische Störung eines deterministischen Systemes, die dem angedeuteten Unabhängigkeitskriterium genügt.

Weil die Begleitfunktion monoton wächst und sie im Ursprung verschwindet, gilt folgende Feststellung, die wir später noch gebrauchen: Ist $[\Psi]$ eine trajectorielle \mathcal{C}^1 -Partition eines Kompaktums eines endlichdimensionalen reellen Raumes, so ist

$$A : \left(\bigcup [\Psi] \right)^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

$$(x, y) \mapsto A(x, y) := \max \left\{ \|\Psi(x, t) - \Psi(y, t)\| : t \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.47)$$

eine stetige Funktion; sie existiert wegen der Kompaktheit des Zustandsraumes $\bigcup [\Psi]$ und wegen den Stetigkeiten der jeweiligen Funktionen $\Psi(x, \text{id})$ für alle Zustände x des Zustandsraumes. Also ist auch das Paar $(\bigcup [\Psi], A)$ ein metrischer Raum, der vollständig ist, weil der Zustandsraum $\bigcup [\Psi]$ der trajectoriellen \mathcal{C}^1 -Partition $[\Psi]$ kompakt ist.

Sehen wir nun von der Übertragbarkeit der Zimmer in homöomorphe Bilder endlichdimensionaler und reeller Zustandsräume einmal ab, die offenbar in die generalisierte Theorie der Zimmer führt.

2.2 Unverhofftes Wiedersehen: Zimmer sind sensitive Attraktoren.

2.2.1 Was sind sensitive Attraktoren?

Wiedererkennen macht Freude: Um den Bezug zu der in der Literatur üblichen Redeweise ganz unmittelbar herzustellen, in der vielfach auch diskrete dynamische Systeme betrachtet werden, beziehen wir uns auf den sogenannten Phasenfluss. Für jede Flussfunktion Ψ mit $\Psi(\text{id}, 0) = \text{id}$ und für jede reelle Zahl t sei die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi(\text{id}, t) : \zeta &\rightarrow \zeta, \\ z &\mapsto \Psi(z, t) \end{aligned} \tag{2.48}$$

und deren Notation als

$$\Psi^t := \Psi(\text{id}, t) \tag{2.49}$$

festgelegt. Diese Notation (2.49) ist nicht unüblich und dadurch motiviert, dass für alle reelle Zahl t_1 und t_2

$$\begin{aligned} \Psi^{t_1+t_2} &= \Psi(\text{id}, t_1 + t_2) \\ &= \Psi(\Psi(\text{id}, t_1), t_2) = \Psi^{t_1} \circ \Psi^{t_2} \end{aligned} \tag{2.50}$$

gilt, falls die Gruppe $(\{\Psi^t : t \in \mathbb{R}\}, \circ)$ Abelsch ist. Wir betrachten Flussfunktionen, deren Kollektivierung Heine-Descartesch ist. Solche Flussfunktionen müssen allerdings keineswegs Abelsche Gruppen des Phasenflusses haben. Die so notierte Abbildung Ψ^t ist ein Beispiel für einen Phasenfluss in dem Zustandsraum ζ , der nun hier gerade im endlichdimensionalen und reellen Raum \mathbb{R}^n liegt. In der Literatur ist auch die sogenannte Gruppe des Phasenflusses

$$((\Psi^t)^{\mathbb{Z}}, \circ) \tag{2.51}$$

eine Konstruktion, die viel verwendet wird, die aber auch manchmal selber als Phasenfluss bezeichnet wird. Wir nennen hier hingegen exakt jede Gruppe

$$(\xi^{\mathbb{Z}}, \circ) \tag{2.52}$$

eine Phasenflussgruppe, wenn ξ eine Bijektion einer Menge Z auf sich ist, wobei \circ die Komposition von Abbildungen sei und Z als ein allgemeiner Zu-

standsraum aufgefasst wird.⁴ Die Notation der Menge $\xi^{\mathbb{Z}}$ ist dabei erläuterungsbedürftig, obwohl unter ihr vielleicht kaum die Menge der Abbildungen der ganzen Zahlen \mathbb{Z} in die Menge $\xi \subset Z \times Z$, die die Bijektion ξ ja ist, verstanden wird. Jene Menge der Abbildungen steht nichtsdestotrotz als $\xi^{\mathbb{Z}}$ eigentlich da. Und daher sagen wir hier ausdrücklich, dass $\xi^{\mathbb{Z}}$ folgendermassen festgelegt sei: Die Schreibweisen

$$\begin{aligned}\xi^0 &:= \text{id} , \\ \xi^1 &:= \xi , \\ k \in \mathbb{Z} &\Rightarrow \xi^{k+1} := \xi \circ \xi^k\end{aligned}\tag{2.53}$$

sind fraglos etabliert, sodass gemäss ebenfalls durchaus üblicher Notations-systematik

$$\xi^{\mathbb{Z}} := \{\xi^k : k \in \mathbb{Z}\}\tag{2.54}$$

die Menge aller sukzessiven Kompositionen der Bijektionen ξ oder ξ^{-1} der Menge Z auf sich selbst ist. Diese Lesart ist es, die nun hier gelte. Und dementsprechend ist

$$(\Psi^t)^{\mathbb{Z}} = \Psi^{t\mathbb{Z}}$$

und auch

$$\Psi^{\mathbb{R}} := \{\Psi^t : t \in \mathbb{R}\}\tag{2.55}$$

eine gerechtfertigte Schreibweise. Die dem Paar (Ψ, t) zugeordnete Phasenflussgruppe (2.51) beschreibt demnach ein diskretes dynamisches System für die spezielle durch den Takt $t \in \mathbb{R}$ gegebene Taktung. Ein dynamisches System ist zu seiner Gruppe des Phasenflusses (Ξ, \circ) äquivalent. Für jedes Element $\xi \in \Xi$ ist die für alle $\xi \in \Xi$ gleiche Definitionsmenge

$$\downarrow \mathbf{P}_1 \Xi = \mathbf{P}_1 \xi$$

der Zustandsraum des durch (Ξ, \circ) gegebenen dynamisches Systemes, wobei für jede einelementige Menge Ξ

$$\downarrow \Xi \in \Xi\tag{2.56}$$

das Element derselben sei. Wir nennen exakt jedes Paar

$$\left((\Xi, \circ), \mathbf{T}(\downarrow \mathbf{P}_1 \Xi) \right)\tag{2.57}$$

⁴Bei manchen Autoren gilt die Phasenflussgruppe aber auch als die Objektivierung des Begriffes des dynamischen Systemes, das mit einer jeweiligen Phasenflussgruppe identifiziert wird.

ein topologisches dynamisches System oder ein Smale-System, wenn dabei $(\downarrow \mathbf{P}_1 \Xi, \mathbf{T}(\downarrow \mathbf{P}_1 \Xi))$ ein topologischer Raum ist. Die Benennung topologischer dynamischer Systeme nach S. Smale liegt deshalb nahe, weil es zuvorderst S. Smale war, der in den späten sechziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts z.B. in seiner klassischen Arbeit [Smale1967] die Verbindung zwischen der Theorie dynamischer Systeme und der mengentheoretischen Topologie etablierte.

Für jedes Element $\xi \in \Xi$ ist ferner $(\xi^{\mathbb{Z}}, \circ)$ eine Untergruppe der Phasenflussgruppe (Ξ, \circ) und diese Untergruppe $(\xi^{\mathbb{Z}}, \circ)$ ist das Äquivalent eines eigenen dynamischen Systemes, das aber seinen Zustandsraum $\mathbf{P}_1 \xi = \downarrow \mathbf{P}_1 \Xi$ mit dem durch (Ξ, \circ) charakterisierten dynamischen System gemein hat.

Betrachten wir die Phasenflussgruppe $(\xi^{\mathbb{Z}}, \circ)$ und die Fixmengen⁵ der Abbildung ξ : Offensichtlich ist für jede Teilmenge $\tilde{A} \subset \mathbf{P}_1 \xi$ die Identität

$$\tilde{A} = \bigcap_{z \in \mathbb{Z}} \xi^z(\tilde{A})$$

genau dann⁶ erfüllt, wenn

$$\xi(\tilde{A}) = \tilde{A}$$

gilt, wobei das Mengensystem aller Fixmengen der Abbildung ξ

$$\mathbf{T}(\xi) := \{\tilde{A} \subset \mathbf{P}_1 \xi : \xi(\tilde{A}) = \tilde{A}\} \quad (2.58)$$

selber eine T_2 -Topologie des Zustandsraumes ist. Dieses Mengensystem ist gerade die Topologie, die wir als die invariante Topologie der Abbildung ξ bezeichnen, die eine Bijektion ihrer Definitionsmenge auf dieselbe ist. Exakt eine Bijektion einer Menge auf dieselbe nennen wir einen Autobolismus. Die invariante Topologie $\mathbf{T}(\xi)$ jedes Autobolismus ξ erfüllt das Trennungsaxiom. Eine Fixmenge $A \in \mathbf{T}(\xi)$ des zu $(\xi^{\mathbb{Z}}, \circ)$ äquivalenten dynamischen Systemes, das die erste Komponente eines Smale-Systemes $((\xi^{\mathbb{Z}}, \circ), \mathbf{T})$ ist, heisst genau dann ein Attraktor des Smale-Systemes $((\xi^{\mathbb{Z}}, \circ), \mathbf{T})$, wenn es für alle offenen Teilmengen $a, b \in \mathbf{T} \cap A$ eine ganze Zahl z von der Art gibt, dass die Reichhaltigkeitsaussage

$$\xi^z(a) \cap b \neq \emptyset \quad (2.59)$$

⁵Bei [GarSimo83] sind sogenannte Attraktoren *senso latto* vorgestellt, die im wesentlichen die Fixmengen der Abbildung ξ sind.

⁶Wäre \tilde{A} eine Menge, für die $\tilde{A} \setminus \xi(\tilde{A}) \neq \emptyset$ wäre, dann läge $x \in \tilde{A} \setminus \xi(\tilde{A})$ so, dass $\xi(x) \notin \xi^2(\tilde{A})$ wäre, sodass x nicht in dem Schnitt der rechten Seite wäre. Ein Element $x \in \xi(\tilde{A}) \setminus \tilde{A}$ hingegen existierte genau dann, wenn $y := \xi^{-1}(x) \in \tilde{A} \setminus \xi^{-1}(\tilde{A})$ wäre, was heisst, dass $\xi^{-1}(y) \notin \xi^{-2}(\tilde{A})$ wäre.

gilt und wenn diese Fixmenge $A \in \mathbf{T}(\xi)$ ausserdem bezüglich der Topologie \mathbf{T} des Smale-Systemes $((\xi^{\mathbb{Z}}, \circ), \mathbf{T})$ quasikompakt ist. Vorzugsweise wurden bislang die Attraktoren reeller und endlichdimensionaler Zustandsräume für Smale-Systeme betrachtet, deren Topologie die natürliche Topologie des jeweiligen Zustandsraumes ist. Deren Attraktoren sind also Kompakta bezüglich der natürlichen Topologie des jeweiligen Zustandsraumes.

Das Kriterium (2.59) objektiviert also die Kohärenz innerhalb einer besonderen Fixmenge der Abbildung ξ , der ein Attraktor ist. Deswegen nennen wir exakt die Erfüllung dieses Kriteriums (2.59) durch eine Fixmenge $A \in \mathbf{T}(\xi)$ die Kohärenz dieser Fixmenge und das Kriterium (2.59) selbst das Kohärenz-Kriterium, das ein Attraktor erfüllen muss, um ein solcher zu sein.⁷ Die Begriffsbildung des Attraktors kommt dabei offenbar eigentlich auch ohne die Bezugnahme auf eine jeweilige festgelegte Zustandsraumtopologie aus. Attraktoren sind insofern wie die jeweiligen Fixmengen auch für dynamische Systeme konzipiert, die keine Smale-Systeme sind. In der Literatur hat sich aber die zusätzliche Forderung der Quasikompaktheit eines Attraktors bereits teilweise eingebürgert.

Da offenbar für alle offenen Teilmengen $a, b \subset \chi \in [[\Psi]]$ eine ganze Zahl von der Art existiert, dass die Reichhaltigkeitsaussage

$$(\Psi^t)^z(a) \cap b \neq \emptyset \quad (2.60)$$

wahr ist für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist jedes nicht triviale Zimmer der natürlichen Partition $[[\Psi]]$ ein Attraktor des zu $((\Psi^t)^{\mathbb{Z}}, \circ)$ äquivalenten dynamischen Systemes, falls die Implikation

$$\tau \in [\Psi] \Rightarrow \chi \setminus \tau \neq \emptyset \quad (2.61)$$

gilt, d.h., falls χ kein triviales Zimmer ist. In dem Fall jedoch, dass χ ein triviales Zimmer ist und das für die Nicht-Trivialität eines Zimmers notwendige und hinreichende Kriterium (2.61) nicht gilt, ist χ nach der erst noch zu zeigenden Bemerkung A.3 entweder eine singuläre Trajektorie oder aber eine geschlossene Trajektorie, die eine positive Periode $T_\chi \in \mathbb{R}^+$ hat. Wenn χ ein mit einer singulären Trajektorie identisches Zimmer ist, so gilt die Reichhaltigkeitsaussage (2.60) für alle $t \in \mathbb{R}$ auf ähnliche Weise wie für nicht triviale Zimmer, jedoch nicht ganz genauso: Wenn χ eine geschlossene Trajektorie

⁷Das Kriterium für sogenannte topologische Transitivität ist eine Verallgemeinerung des diskret formulierten Kohärenz-Kriteriums. (2.59). Wir werden aber ausserhalb dieser Abhandlung alsbald abstrakte und allgemeine Kohärenz-Kriterien vorstellen.

mit der Periode $T_\chi \in \mathbb{R}^+$ ist, ist χ für jede Taktung $t \in \mathbb{R} \setminus T_\chi \mathbb{Z}$ ein Attraktor des zu $((\Psi^t)^\mathbb{Z}, \circ)$ äquivalenten dynamischen Systemes.

Zimmer sind also auf die beschriebene Weise Attraktoren: Ausser in dem Fall ihrer nicht singulären Geschlossenheit sind sie Attraktoren des Smale-Systemes

$$\left((\Psi^\mathbb{R}, \circ), \mathbf{T}(\dim \Psi) \right) .$$

Ausserdem sind Zimmer insofern elementar, als es keine kleineren Attraktoren gibt: Ist die Teilmenge $A \subset \bigcup [[\Psi]]$ ein Attraktor des komanent-immanenten Trajektorienkollektives $[\Psi]$ in dem Sinn, dass für die sie repräsentierende Flussfunktion Ψ (2.60) gilt, so gilt die Implikation

$$A \subset \chi \in [[\Psi]] \Rightarrow \chi \subset A . \quad (2.62)$$

Wir erwähnen noch, dass die Eigenschaft eines Zimmers aus $[[\Psi]]$, ein Attraktor des Smale-Systemes $((\Psi^\mathbb{R}, \circ), \mathbf{T}(\dim \Psi))$ zu sein, für alle Flussfunktionen Ψ gilt, die das komanent-immanente Trajektorienkollektiv $[\Psi]$ repräsentieren:

Der Begriff des Zimmers ist eine Abstraktion des Begriffes des Attraktors. Ersterer ist nämlich eine Abstraktion insofern, als er die definitorische Bindung abstreift, die der Begriff des Attraktors eines dynamischen Systemes noch hat: Der Begriff des Attraktors ist an eine spezielle Repräsentation eines dynamischen Systemes in Gestalt einer Flussfunktion Ψ gebunden. Der Begriff des Zimmers ist hingegen insofern gleichermassen abstrakter und geometrisch, als er auf der Gegebenheit trajektorieller Partitionen des Zustandsraumes fusst.

Es gibt viel Literatur zu Attraktoren und es wurden auch viele Attraktoren studiert. Besonderes Interesse kam dabei den sogenannten sensitiven Attraktoren zu: Die „Sensitivität“ der sensitiven Attraktoren ist der Ausdruck des Erstaunens über das Phänomen, dass die evolutionäre Unterscheidbarkeit von Zuständen gegeben sein kann, obwohl deren Unterschiedenheit nicht auflösbar ist.

Dieses Sensitivitätsphänomen präsentiert sich dabei in logischer Diversität: Es lassen sich verschiedene, keineswegs logisch gleichwertige Erscheinungsbilder der Sensitivität dynamischer Systeme differenziert formulieren. Diejenige Form der Sensitivität, die wir als den Repräsentanten der etablierten Hauptformen der Sensitivität dynamischer Systeme auffassen können, ist die folgende Erscheinung, die es genauso, wie es sie für Flussfunktionen gibt, auch

allgemeiner für Wellenfunktionen gibt. Dabei verstehen wir ja gemäss (1.55) unter einer Wellenfunktion jede Abbildung Ξ aus einer Menge

$$\mathbf{P}_2 \Xi^{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1 \Xi \times \mathbf{R}} , \quad (2.63)$$

falls deren Wertemenge $\mathbf{P}_2 \Xi \subset \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1 \Xi$ im ersten kartesischen Faktor $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1 \Xi$ ihrer Definitionsmenge $\mathbf{P}_1 \Xi$ enthalten ist, der in einem endlichdimensionalen und reellen Raum liege: Auch für diese Wellenfunktion Ξ kann deren Sensitivität in dem Zustand $x \in \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1 \Xi$ auf die Weise vorliegen, die sich durch die Hilfskonstruktion der Menge

$$M_\Xi(x) := \left\{ \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists y \in \mathbb{B}_\varepsilon(x) \cap \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1 \Xi \forall T \in \mathbb{R}^+ \exists t \in]T, \infty[\right. \\ \left. ||\Xi(x, t) - \Xi(y, t)|| > \delta \right\} \quad (2.64)$$

so formulieren lässt: Genau dann, wenn die Menge $M_\Xi(x)$ nicht leer ist, nennen wir die Wellenfunktion Ξ im Zustand $x \in \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1 \Xi$ sensitiv. Ferner ist die Sensitivität der Wellenfunktion Ξ durch die Funktion

$$\Delta_\Xi : \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1 \Xi \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\} , \\ x \mapsto \Delta_\Xi(x) := \sup M_\Xi(x) \quad (2.65)$$

quantitativ bewertbar, exakt welche wir fortan für jede Wellenfunktion Ξ als deren Auflösungsfeld bezeichnen wollen. Genau dann, wenn die Wellenfunktion Ξ im Zustand $x \in \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1 \Xi$ nicht sensitiv ist, ist ihr Auflösungsfeld in x singulär, nämlich das mit $-\infty$ identifizierte Supremum der leeren Menge. Diese allgemein formulierte Sensitivität umfasst damit auch eine der Sensitivitätsformen einer jeweiligen Flussfunktion Ξ in einem jeweiligen Zustand; und gerade diese Sensitivitätsform einer jeweiligen Flussfunktion bezeichnen wir als deren zustandsweise Sensitivität im jeweiligen Zustand.

Nehmen wir an, uns werde eine Flussfunktion Ψ vorgelegt, deren Zustandsraum χ in einem endlichdimensionalen und reellen Raum liege und die überdies komanent sei. Solche Flussfunktionen gibt es sehr wohl. Komanenz und Sensitivität der Flussfunktion Ψ in dem Sinn, dass

$$\Delta_\Psi(\mathbf{P}_2 \Psi) \neq \{-\infty\}$$

ist, und dass Ψ dabei komanent ist, schliessen einander nicht aus! Für Ψ gelte die Aussage

$$\exists x \in \chi \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \mathbb{B}_\varepsilon(x) \exists T \in \mathbb{R}^+ : \\ t \in]T, \infty[\Rightarrow ||\Psi(x, t) - \Psi(y, t)|| < \delta , \quad (2.66)$$

die behauptet, dass es einen Zustand $x \in \chi$ gibt, in dem Ψ nicht zustandsweise Sensitivität zeige. Dann gibt es also erstens die Funktion

$$\begin{aligned}\varepsilon_x : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ \delta &\mapsto \varepsilon_x(\delta)\end{aligned}\tag{2.67}$$

und zu derselben zweitens die Funktion

$$\begin{aligned}T : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta)}(x) \cap \chi &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ (\delta, y) &\mapsto T(\delta, y),\end{aligned}\tag{2.68}$$

deren jeweiliger Wert für alle $y \in \mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta)}(x)$ das Infimum

$$T(\delta, y) := \inf \left\{ T \in \mathbb{R}^+ : t > T \Rightarrow \|\Psi(x, t) - \Psi(y, t)\| < \delta \right\}\tag{2.69}$$

sei. Nehmen wir des weiteren an, dass diese Funktion T stetig sei: Dann ist das Supremum

$$T^*(\delta) := \sup T(\delta, \mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta)}(x)) \in \mathbb{R}^+\tag{2.70}$$

eine positive reelle Zahl, für die die Implikation

$$\begin{aligned}(y, t) \in \mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta)}(x) \times]T^*(\delta), \infty[&\Rightarrow \\ \|\Psi(x, t) - \Psi(y, t)\| &< \delta\end{aligned}$$

gilt. Wegen der Kompanenz der Flussfunktion Ψ gilt aber auch andererseits, dass es eine Funktion

$$\begin{aligned}\varepsilon^x : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ (\delta, T) &\mapsto \varepsilon^x(\delta, T)\end{aligned}\tag{2.71}$$

gibt, für die für alle Paare $(\delta, T) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ die Implikation

$$\begin{aligned}(y, t) \in \mathbb{B}_{\varepsilon^x(\delta, T)}(x) \times [0, T^*(\delta)] &\Rightarrow \\ \|\Psi(x, t) - \Psi(y, t)\| &< \delta\end{aligned}$$

wahr ist, sodass für alle $(\delta, T, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ die Implikation

$$\begin{aligned}\|y - x\| < \min\{\varepsilon^x(\delta, T^*(\delta)), \varepsilon_x(\delta)\} &\Rightarrow \\ \|\Psi(x, t) - \Psi(y, t)\| &< \delta\end{aligned}$$

gilt. Diese Flussfunktion Ψ ist also, wenn die Annahme (2.66) zutrifft, so beschaffen, dass die durch x verlaufende Trajektorie $\Psi(x, \mathbb{R})$ mit ihrer abgeschlossenen Hülle $\text{cl}(\Psi(x, \mathbb{R}))$ identisch ist, wie sich leicht zeigen lässt. Ist χ

ein nicht triviales Zimmer, so kann daher die Annahme (2.66) nicht gelten. Diese Beobachtung legt uns geradezu aufdringlich nahe, zu versuchen, die zustandsweise Sensitivität der nicht trivialen Zimmer komanent-imanenter Flussfunktionen binnen beschränkter und endlichdimensionaler und reeller Zustandsräume zu zeigen. Und zwar, indem wir die Stetigkeit der jeweiligen Entsprechung zu der Funktion T gemäss (2.68) beweisen. Dieser Weg ist vielleicht gangbar. Er ist jedoch steinig und dieser Weg liegt im Gähnen der Gefahr, dass die seiner Idee folgende Argumentation nicht lückenlos ist.

2.2.2 Die zustandsweise Sensitivität nicht trivialer Zimmer

Um innerhalb eines allgemeineren Rahmens einzusehen, dass nicht triviale Zimmer die zustandsweise Sensitivität haben, betrachten wir wieder nicht speziell eine Flussfunktion, sondern eine Wellenfunktion Ξ , deren Wertemenge $\mathbf{P}_2\Xi \subset \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\Xi$, wie vorhin, im zweiten kartesischen Faktor $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\Xi$ ihrer Definitionsmenge $\mathbf{P}_1\Xi$ enthalten ist, der in einem endlichdimensionalen und reellen Raum liege. Ξ sei aber diesesmal eine stetige Wellenfunktion. Zu dieser \mathcal{C} -Wellenfunktion Ξ gibt es die durch sie bestimmte sekundäre Funktion in jedem Punkt $x \in \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\Xi$

$$\begin{aligned} T[\Xi, x] : \mathbb{R}^+ \times \mathbf{P}_2\Xi &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}, \\ (\delta, y) &\mapsto T[\Xi, x](\delta, y), \end{aligned} \quad (2.72)$$

deren jeweiliger Wert für alle $y \in \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\Xi$ das Infimum

$$T[\Xi, x](\delta, y) := \inf \left\{ T \in \mathbb{R}^+ : t > T \Rightarrow \|\Xi(x, t) - \Xi(y, t)\| < \delta \right\} \quad (2.73)$$

sei. Wegen der Stetigkeit der Wellenfunktion Ξ gilt daher die Gleichung

$$\|\Xi(x, T[\Xi, x](\delta, y)) - \Xi(y, T[\Xi, x](\delta, y))\| = \delta, \quad (2.74)$$

die den Wert $T[\Xi, x](y, \delta)$ als absolutes Maximum der Restriktion

$$(\|\Xi(x, \text{id}) - \Xi(y, \text{id})\|) [T[\Xi, x](\delta, y), \infty[$$

auf das Intervall $[T[\Xi, x](\delta, y), \infty[$ kennzeichnet. Dieser Wert $T[\Xi, x](y, \delta)$ ist eine Stelle des Zahlenstrahles, in der die Funktion $\Xi_{x,y}$ monoton fällt, wobei $\Xi_{a,b}$ für jedes Paar $(a, b) \in \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\Xi \times \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\Xi$ die auf dem Zahlenstrahl als

$$\Xi_{a,b} := \|\Xi(x, \text{id}) - \Xi(y, \text{id})\|$$

erklärte, nicht negative, reelle Funktion sei. Einfachheitshalber betrachten wir nun eine Wellenfunktion Φ , die ansonsten wie Ξ beschaffen sei, ausser, dass sie überdies eine $\mathcal{C}^{0,1}$ -Wellenfunktion⁸ sei, womit bezeichnet sei, dass Φ in der ersten Veränderlichen stetig und in der zweiten Veränderlichen stetig differenzierbar sei. Dann ist das streng monotone Fallen der $\Xi_{x,y}$ entsprechenden Funktion $\Phi_{x,y}$ übersichtlich zu erfassen. Es ist genau dann der Fall, wenn das ebenfalls auf dem ganzen Zahlenstrahl existierende Produkt dieser Funktion $\Phi_{x,y}$ mit ihrer Ableitung

$$\Phi_{x,y} \Phi'_{x,y}$$

an der Stelle $T[\Phi, x](y, \delta)$ einen negativen Wert annimmt. Dass $\Phi_{x,y} \Phi'_{x,y}$ an dieser Stelle $T[\Phi, x](y, \delta)$ dabei einen positiven Wert hat, widerspricht der Konstruktion des Infimums $T[\Phi, x](y, \delta)$. Es ist zwar die Positivität

$$\Phi_{x,y} \Phi'_{x,y} | [T[\Phi, x](\delta, y), \infty[> 0$$

nicht möglich, aber es kann sein, dass der kritische Fall vorliegt, dass

$$\Phi_{x,y} \Phi'_{x,y} (T[\Phi, x](y, \delta)) = 0 \quad (2.75)$$

ist. (In $T[\Phi, x](y, \delta)$ ist dann aber dennoch nicht notwendigerweise ein lokales Maximum der Funktion $\Phi_{x,y}$.) Betrachten wir nur den unkritischen Fall, dass

$$\Phi_{x,y} \Phi'_{x,y} (T[\Phi, x](y, \delta)) < 0 \quad (2.76)$$

ist. Es sei gemäss unserer Notation (1.38) von Auswahlen durch eine Menge

$$J \in \mathbf{T}(1)_{\{T[\Phi, x](y, \delta)\}}$$

eine hinreichend kleine Umgebung des Punktes $T[\Phi, x](y, \delta)$, sodass $\|\Phi(x, t) - \Phi(y + h_k, \text{id})\|$ die Restriktion der Funktion $\|\Phi(x, t) - \Phi(y + h_k, \text{id})\|$ auf jene offene Teilmenge $J \subset \mathbb{R}$, mithin selber eine Funktion ist, und der Wert

$$(\|\Phi(x, t) - \Phi(y + h_k, \text{id})\| | J)^{-1}(\delta)$$

⁸ $\mathcal{C}^{0,1/2}$ -Wellenfunktion seien exakt diejenigen Wellenfunktionen, die in der ersten Veränderlichen stetig und in der zweiten Veränderlichen stückweise stetig differenzierbar sind und $\mathcal{C}^{0,-1/2}$ -Wellenfunktion seien dementsprechend exakt diejenigen Wellenfunktionen, die in der ersten Veränderlichen stetig und in der zweiten Veränderlichen stückweise stetig sind.

eine reelle Zahl, die in J ist. Dieser Wert verschiebt sich in diesem Fall gegenüber $T[\Phi, x](y, \delta)$ beliebig wenig, wenn k ein hinreichend hoher Folgenindex der Nullfolge

$$\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}^{\dim \Phi}\right)^{\mathbb{N}}$$

ist, die so beschaffen sei, dass die Aussage

$$\begin{aligned} k \in \mathbb{N} \Rightarrow y + h_k \in \mathbf{P}_2\Phi \wedge \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|h_k\| = 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

gelte, wobei $\dim \Phi$ die Komponentenzahl der $\mathcal{C}^{0,1}$ -Wellenfunktion Φ sei. Selbst in diesem unkritischen Fall der besagten strengen Monotonie gemäss (2.76) ist die Funktion $T[\Phi, x](\delta, \text{id})$ dennoch nicht notwendigerweise in einer Umgebung des Punktes $x \in \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\Phi$ stetig: Die Funktion $T[\Phi](y, \text{id})$ ist offenbar nicht stetig, wenn es eine streng monoton wachsende Folge

$$\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in ([T[\Phi, x](\delta, y), \infty[)^{\mathbb{N}}$$

gibt, für die die Grenzwertaussage

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(y, t_k) = \delta \quad (2.78)$$

gilt. Und dass wir dabei diese Möglichkeit nicht ausschliessen können, belegen entsprechende Beispiele, deren Existenz evident ist. Zwei Sacherhalte sind auseinanderzuhalten: Die Tatsache, dass es in dem unkritischen Fall der besagten strengen Monotonie gemäss (2.76) eine Umgebung J des Punktes $T[\Phi, x](y, \delta)$ gibt, für die der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T[\Phi, x](y, \delta) - (\|\Phi(x, t) - \Phi(y + h_k, \text{id})\|J)^{-1}(\delta) = 0 \quad (2.79)$$

ist, differiert von der Stetigkeitsbehauptung, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T[\Phi, x](y, \delta) - T[\Phi, x](y + h_k, \delta) = 0 \quad (2.80)$$

ist. Die entsprechende Sachverhaltsdifferenz zwischen (2.79) und (2.80) besteht offenbar auch für eine \mathcal{C} -Wellenfunktion Ξ noch so hoher Kontinuität: Wir können gegebenenfalls auch aus der noch so hohen Kontinuität der Wellenfunktion Ξ alleine noch keinen Schluss auf die Stetigkeit der Funktion $T[\Xi, x](\text{id}, \delta)$ ziehen. In der Funktion $T[\Xi, x](\text{id}, \delta)$ stossen wir also auf ein

Epikonstrukt zu einer Wellenfunktion Ξ , das insofern bemerkenswert ist, als Ξ von noch so hoher Kontinuität sein kann und dennoch ist $T[\Xi, x](\text{id}, \delta)$ nicht stetig: Die potenzielle Differenz zwischen dem Sachverhalt (2.79) und der Stetigkeit (2.80) ist offenbar eine Frage der Kontinuität des zu der Wellenfunktion Ξ konstruierten sekundären Epikonstruktes $T[\Xi, x](\text{id}, \delta)$, die aber keine alleinige Frage der Kontinuität der primären Wellenfunktion Ξ ist. Dieses Epikonstrukt $T[\Xi, x](\text{id}, \delta)$ kann dennoch – selbst in dem unkritischen Fall der (2.76) entsprechenden strengen Monotonie – sprunghaft sein.⁹ Demnach ist die folgende Benennung motiviert: Für jede \mathcal{C} -Wellenfunktion Ξ , deren Wertemenge $\mathbf{P}_2\Xi \subset \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\Xi$ im zweiten kartesischen Faktor $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\Xi$ ihrer Definitionsmenge $\mathbf{P}_1\Xi$ enthalten ist, der in einem endlichdimensionalen und reellen Raum liegt und für jeden Punkt $x \in \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\Xi$ nennen wir exakt die Funktion $T[\Xi, x]$ die *atque-fecit-saltus* - Funktion zu der Wellenfunktion Ξ an der Stelle $x \in \mathbf{P}_1\mathbf{P}_1\Xi$.

Die Stetigkeit einer jeweiligen *atque-fecit-saltus* - Funktion $T[\Xi, x]$ in ihrer ersten Veränderlichen wird nicht durch die Kontinuität der Wellenfunktion Ξ alleine bestimmt. Sie wird nämlich von der Kollektivierungsstruktur der Wellenfunktion Ξ in hohem Grad mitbestimmt. Dies zeigt die folgende

Bemerkung 2.2.1:

Die Unkritische Stetigkeit einer *atque-fecit-saltus*-Funktion

*Es sei Ξ eine Wellenfunktion, die speziell eine komanent-immanente $\mathcal{C}^{0,1}$ -Flussfunktion Ξ ist, deren Zustandsraum $\mathbf{P}_2\Xi$ beschränkt ist und $\chi \in [[\Xi]]$ ein Zimmer. Die Spezifizierung der zu Ξ gehörenden *atque-fecit-saltus* - Funktion $T[\Xi, x](\delta, \text{id})$ für $\delta \in \mathbb{R}^+$ und für einen Zustand $x \in \chi$ ist auf der Teilmenge*

$$U_\delta^\Xi(x) := \left\{ y \in \mathbb{B}_{T[\Xi, x](\delta, y)}(x) \cap \chi : \Xi_{x, y} \Xi'_{x, y}(T[\Xi, x](y, \delta)) \neq 0 \right\} \quad (2.81)$$

stetig.

Beweis:

Das Kompaktum $\chi \in [[\Xi]]$ ist ein Zimmer. Deswegen gelingt es uns zu zeigen, dass die Funktion $T[\Xi, x](\text{id}, \delta)|_\chi$ für die positive reelle Zahl δ und den Zustand $x \in \chi$ im Punkt $y \in \chi \in [[\Xi]]$ in dem Fall tatsächlich stetig ist, der in dem Sinn unkritische Fall ist, dass in $y \in \chi \in [[\Xi]]$

$$\Xi_{x, y} \Xi'_{x, y}(T[\Xi, x](y, \delta)) < 0$$

⁹Das wundert nicht nur den Fachmann wenig. Nichtsdestotrotz halten wir die gewählte Benennung für motiviert.

gilt:

Weil y in dem selben Zimmer χ ist, in dem auch x ist, schneidet die Menge

$$\Xi(y, [T[\Xi, x](\delta, y), \infty[)$$

jede Kugel

$$\mathbb{B}_{\delta-\vartheta}(x)$$

um x , gleich, wie klein deren Radius $\delta - \vartheta \in \mathbb{R}^+$ ist. Für jede positive reelle Zahl $\vartheta \in]0, \delta[$ muss es also die positive reelle Zahl $\Theta(y, \vartheta)$ geben, für die für alle $t \in [\Theta(y, \vartheta), \infty[$ die Ungleichung

$$\Xi_{x,y}(t) < \delta - \vartheta$$

erfüllt sein muss, was mit dem Szenario nicht vereinbar ist, das dem Zutreffen der Grenzwertaussage (2.78) entspricht. Die entsprechende Zahl $\Theta(y_k, \vartheta)$ gibt es dabei auch für alle Folgenindizes $k \in \mathbb{N}$ einer gegen y konvergenten Folge

$$\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \chi^{\mathbb{N}}.$$

Es gilt sowohl die Implikation

$$t > T[\Xi, x](\delta, y) \Rightarrow \Xi_{x,y}(t) < \delta$$

als auch die Implikation

$$t > \Theta(y, \vartheta) \Rightarrow \Xi_{x,y}(t) < \delta - \vartheta$$

und daher weicht der Funktionswert $T[\Xi, x](\delta, y_k)$ von dem Funktionswert $T[\Xi, x](\delta, y)$ beliebig wenig ab, wenn $\|y - y_k\|$ hinreichend klein ist.¹⁰ Also

¹⁰Denn es gibt die Zahl α im Intervall

$$]0, T[\Xi, x](\delta, y) - \Theta(y, \vartheta)[,$$

für die das Maximum

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \delta - \Xi_{x,y}(t) : t \in [T[\Xi, x](\delta, y) - \alpha, \Theta(y, \vartheta)] \right\} \\ & = \delta - \Xi_{x,y}(T[\Xi, x](\delta, y) - \alpha) > 0 \end{aligned}$$

positiv ist. Also gibt es eine natürliche Zahl $k^* \in \mathbb{N}$, für die für $k > k^*$ die Norm $\|y - y_k\|$ so klein ist, dass für alle $t \in [T[\Xi, x](\delta, y) - \alpha, \Theta(y, \vartheta)] \cup [\Theta(y, \vartheta), \Theta(y + h_k, \vartheta)]$ die Ungleichung

$$\Xi_{x,y_k}(t) < \delta$$

gilt.

ist die Funktion $T[\Xi, x](\delta, \text{id})$ auf der gemäss (2.81) festgelegten Teilmenge $U_\delta^\Xi(x)$ der relativen Kugel $\mathbb{B}_{T[\Xi, x](\delta, y)}(x) \cap \chi$ stetig.

q.e.d.

Bedenken wir nun noch einmal die Feststellung, die wir für die komanente Flussfunktion Ψ trafen, ehe wir dann anschliessend die atque-fecit-saltus - Funktionen einföhrten. Diese Feststellung war, dass, wenn die Annahme (2.66) für die Flussfunktion Ψ in $x \in \mathbf{P}_2\Psi$ zutrifft, kein nicht triviales Zimmer $\chi \in [[\Psi]]$ den Zustand x als Element hat: Wir erkennen dann, dass unsere kurze Untersuchung der atque-fecit-saltus - Funktionen andeutet, dass das zustandsweise Sensitivitätsphänomen in einem Zustand x bei Flussfunktionen Ψ , deren Kollektivierung eine natürliche Partion in Zimmer bestimmt, als singuläres Verhalten verstanden werden kann; nämlich als das in dem Sinn singuläre Verhalten der zu der jeweiligen Flussfunktion Ψ gegebenen atque-fecit-saltus - Funktion $T[\Psi, x]$, die exakt im Fall der zustandsweisen Sensitivität der Flussfunktion Ψ im Zustand x nicht beschränktbar ist.

Wir fögen dieser Bemerkung 2.2.1 noch die tivialie Perspektive hinzu, dass wir die Behauptung des folgenden Satzes 2.2.2 zeigen, falls wir für jeden kritischen Zustand

$$y^\star \in \mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta)}(x) \setminus U_\delta^\Psi(x)$$

und für jede gegen denselben konvergente Folge

$$\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in (U_\delta^\Psi(x))^\mathbb{N}$$

die Grenzwertaussage

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T[\Xi](y_k, \delta) = T[\Xi](y^\star, \delta)$$

zeigen können. Diesen Weg müssen wir aber nicht einschlagen.

Wir finden, dass nicht triviale Zimmer eines komanent-immanenten Trajektorienkollektives in Sinne des folgenden Satzes sensitive Attraktoren sind:

Satz 2.2.2: Die Sensitivität nicht trivialer Zimmer:

Alle nicht trivialen Zimmer $\chi \in [[\Psi]]$, die Zimmer der natürlichen Partion eines beschränkten, komanent-immanenten Trajektorienkollektives $[\Psi]$ sind, sind für alle es repräsentierenden Flussfunktionen Ψ sensitive Attraktoren in

dem Sinn, dass es eine positive reelle Zahl $Q(\chi, \delta)$ von der Art gibt, dass für alle $t \in]0, Q(\chi, \delta)[$ und für alle nicht trivialen Zimmer $\chi \in [[\Psi]]$

$$\forall x \in \chi \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists y \in \mathbb{B}_\varepsilon(x), z \in \mathbb{Z} : \quad ||(\Psi^t)^z(x) - (\Psi^t)^z(y)|| > \delta \quad (2.82)$$

gilt.

Beweis:

Es sei $\chi \in [[\Psi]]$ ein nicht triviales Zimmer, das wegen der Beschränktheit des komanent-immanenten Trajektorienkollektives $[\Psi]$ kompakt ist.

Unser Beweis ist indirekt und er besteht vor allem darin, zu zeigen, dass die Annahme, dass χ kein sensitiver Attraktor ist, im Widerspruch zur Nichttrivialität des Zimmers χ steht, von dem wir bereits wissen, dass es ein Attraktor ist:

Nehmen wir an, es gelte die Aussage

$$\exists x \in \chi \forall \delta_1 \in \mathbb{R}^+ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \mathbb{B}_\varepsilon(x) \exists T \in \mathbb{R}^+ : \quad t \in]T, \infty[\Rightarrow ||\Psi(x, t) - \Psi(y, t)|| < \delta_1 . \quad (2.83)$$

Dann gibt es also erstens die Funktion

$$\begin{aligned} \varepsilon_x : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ \delta &\mapsto \varepsilon_x(\delta) \end{aligned} \quad (2.84)$$

und zu derselben zweitens die Funktion

$$\begin{aligned} T\langle \varepsilon_x \rangle : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta)}(x) &\rightarrow \mathbb{R}^+, \\ (\delta, y) &\mapsto T\langle \varepsilon_x \rangle(\delta, y) , \end{aligned} \quad (2.85)$$

deren jeweiliger Wert für alle $y \in \mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta)}(x)$ das Infimum

$$T\langle \varepsilon_x \rangle(\delta, y) := \inf \left\{ T \in \mathbb{R}^+ : t > T \Rightarrow ||\Psi(x, t) - \Psi(y, t)|| < \delta \right\} \quad (2.86)$$

sei. Für alle $(z, \varepsilon) \in \chi \times \mathbb{R}^+$ sei dabei während dieses Beweises mit $\mathbb{B}_\varepsilon(z)$ die offene relative Kugel

$$\mathbb{B}_\varepsilon(z) := \{ \tilde{z} \in \chi : ||z - \tilde{z}|| < \varepsilon \}$$

bezeichnet. Die Funktion $T\langle \varepsilon_x \rangle$ ist eine atque-fecit-saltus - Funktion und mit deren Hilfe zu argumentieren, erfordert Vorsichtigkeit, wie wir bereits in den

Vorbemerkungen zu dem Satz 2.2.2 herausstellten.

Die Argumentation mittels der atque-fecit-saltus - Funktion $T\langle\varepsilon_x\rangle$ halten wir daher gerne kurz und dies ist uns dadurch ermöglicht, dass y in dem selben Zimmer ist, in dem auch x ist. Per constructionem schneidet die Menge

$$\Psi(y, [T\langle\varepsilon_x\rangle(\delta_1, y), \infty[)$$

auch die Kugel

$$\mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta_2)}(x)$$

für die positive reelle Zahl

$$\delta_2 = \frac{1}{2}\delta_1 .$$

Also muss es auch die positive reelle Zahl $\Theta(y, \delta_2)$ geben, für die für alle $t \in [\Theta(y, \delta_2), \infty[$ die Ungleichung

$$||\Psi(x, t) - \Psi(y, t)|| < \delta_2$$

erfüllt sein muss. Wir sehen, dass wir die gleiche Schlussweise immer wieder wiederholen können: Die Menge $\Psi(y, [T\langle\varepsilon_x\rangle(\delta_j, y), \infty[)$ schneidet die Kugel

$$\mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta_{j+1})}(x)$$

für die positive reelle Zahl

$$\delta_{j+1} := \frac{1}{2}\delta_j$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Demnach fließt die Kugel $\mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta_1)}(x)$ in dem Sinn in die Kugel $\mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta_j)}(x)$ für alle $j \in \mathbb{N}$, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta_1)}(x)$ die Aussage

$$\exists t \in \mathbb{R}^+ : \Psi(z, [t, \infty[) \subset \Psi(\mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta_j)}(x), [0, \infty[)$$

gilt. Die gleiche Argumentationsweise können wir genausogut für die entwicklungsinvertierte, mit Hilfe der Festlegung (1.19) formulierte Flussfunktion

$$\Psi^- := \Psi(\mathbf{P}_1, -\mathbf{P}_2)$$

wie für die ursprüngliche Flussfunktion Ψ praktizieren: Jeder der Punkte $z \in \mathbb{B}_{\varepsilon_x(\delta_1)}(x)$ muss daher beliebig nahe bei x liegen, was aber mit der positiv definiten Funktion ε_x gemäss (2.84) per constructionem nicht vereinbar ist. Daher kann die Aussage (2.83) nicht gelten, wenn $\chi \in [[\Psi]]$ ein nicht triviales

Zimmer ist.

Der Rest ist nun einfach: Für jedes nicht triviale Zimmer $\chi \in [[\Psi]]$ gilt also

$$\forall x \in \chi \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists y \in \mathbb{B}_\varepsilon(x) \forall T \in \mathbb{R}^+ \exists t \in]T, \infty[: \quad (2.87)$$

$$||\Psi(x, t) - \Psi(y, t)|| > \delta .$$

Für jeden Zustand x des nicht trivialen Zimmers χ und für jede positive reelle Zahl τ gibt es eine weitere positive reelle Zahl $\delta \in \mathbb{R}^+$ von der Art, dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein beliebig nahe bei x liegender Zustand $y \in \mathbb{B}_\varepsilon(x)$ existiert, für den für jede natürliche Zahl m eine streng monoton wachsende Folge

$$\{t(j, m, \tau)\}_{j \in \mathbb{N}} \in [m\tau, \infty[^{\mathbb{N}}$$

existiert, für die für alle $j \in \mathbb{N}$

$$||\Psi(x, t(j, m, \tau)) - \Psi(y, t(j, m, \tau))|| > \delta$$

gilt. Da χ kompakt und Ψ stetig ist, gibt es eine grösste Zahl $q(\chi, \delta/4) \in \mathbb{R}^+$, für die für alle $(z, t) \in \chi \times \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\sup ||\Psi(z, t + [-q(\chi, \delta/4), q(\chi, \delta/4)]) - \Psi(z, t + [-q(\chi, \delta/4), q(\chi, \delta/4)])|| \leq \delta/4$$

wahr ist, sodass für alle

$$t \in \bigcup \left\{ t(j, m, \tau) + [-q(\chi, \delta/4), q(\chi, \delta/4)] : j \in \mathbb{N} \right\}$$

die Abschätzung

$$||\Psi(x, t) - \Psi(y, t)|| > \delta/4$$

gilt. Wenn $\tau \leq q(\chi, \delta/4)$ ist, dann gilt also die Aussage

$$\exists \delta/4 \in \mathbb{R}^+ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists y \in \mathbb{B}_\varepsilon(x), z \in \mathbb{N} :$$

$$||\Psi^\tau)^z(x) - \Psi^\tau)^z(y)|| > \delta/4 .$$

q.e.d.

Es folgt damit unmittelbar das

Korollar 2.2.3: Trivialitätssatz

Alle Elemente jeder insensitiven Heine-Descartessche Kollektivierung $[\Psi]$ sind Zyklen.

Beweis:

Die zustandsweise Sensitivität jeder Flussfunktion Ψ , für die

$$\Delta_{\Psi}(\mathbf{P}_2\Psi) \neq \{-\infty\}$$

gilt, widerspricht deren Asensitivität in dem Sinn, dass gemäss (1.12) für alle $t \in \mathbb{R}$

$$(\Psi^t)^{-1}\mathbf{cl}\Psi^t = \text{id}$$

ist. **q.e.d.**

Wir fügen dem Satz 2.2.2 die folgende Vermutung hinzu, die wir die Vermutung maximaler Sensitivität nennen:

Darüber hinaus könnte der Auflösungsfeldwert jedes Zimmers χ als dessen jeweilige Auflösungskonstante $\Delta(\chi)$ in dem Sinn existieren, dass das Auflösungsfeld der auf das jeweilige Zimmer χ restringierten Wellenfunktion $\Psi|_{\chi \times \mathbb{R}}$ konstant ist: Es nimmt den singulären Wert $-\infty$ für jedes triviale Zimmer an, keiner dessen Zustände sensitiv ist. Für jedes nicht triviale Zimmer χ hingegen könnte als jeweilige Auflösungskonstante für alle $x \in \chi$ die Zahl

$$\Delta(\chi) := \Delta_{\Psi|_{\chi \times \mathbb{R}}}(x) = \|\chi\| \in \mathbb{R}^+ , \quad (2.88)$$

vorliegen und einfach mit dem Durchmesser des betrachteten nicht trivialen Zimmers χ übereinstimmen.

Ferner bemerken wir: Wenn ein Takt $t > Q(\chi, \delta)$ grösser als die entsprechende Konstante $Q(\chi, \delta)$ ist, so gibt es eine natürliche Zahl p , für die $t/p \leq Q(\chi, \delta)$ gilt. Die Aussage (2.82) des Satzes 2.2.2 gilt also auch für den Takt $\tau > Q(\chi, \delta)$, wenn die für einen jeweiligen Zustand $y \in \mathbb{B}_{\varepsilon}(x)$ und für das Tripel

$$(x, \delta, \varepsilon) \in \chi \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

spezifizierte Menge

$$\{z \in \mathbb{N} : \|\Psi^{t/p})^z(x) - \Psi^{t/p})^z(y)\| > \delta\} ,$$

deren Kardinalität die Kardinalität $\mathbf{card}(\mathbb{N})$ ist, nicht endlich viele Vielfache der natürlichen Zahl p hat, wenn also

$$\mathbf{card}\left(\{z \in \mathbb{N} : \|\Psi^{t/p})^z(x) - \Psi^{t/p})^z(y)\| > \delta\} \cap p\mathbb{N}\right) = \mathbf{card}(\mathbb{N})$$

ist. Dann ist χ ein sensitiver Attraktor auch für den Takt $\tau > Q(\chi, \delta)$.
 Beispiele für Fixmengen jeweiliger Autopolismen, für Attraktoren und für sensitive Attraktoren sind bei [Smale1967], [Irwin980], [GarSimo83], [EckRue85] oder bei [Walter82] zu finden.
 Das für uns sehr Bemerkenswerte ist also, dass Zimmer, diese elementaren Attraktoren, den zu einer trajektoriellen Partition gehörenden Zustandsraum partitionieren, wenn derselbe kompakt ist:

Der Zustandsraum einer trajektoriellen Partition ist in seine elementaren Attraktoren partitioniert - die im allgemeinen sensitive Attraktoren sind.

Der folgende Hinweis irritiert vielleicht. Er soll aber neugierig machen und er will dazu anregen, weiterzufragen und weiterzulesen: Wir isolieren aus dem 8. Lehrsatz aus Leibnizens Monadologie

„[...] Wenn nun die Monaden ohne Qualitäten wären, so würden sie nicht voneinander zu unterscheiden sein; denn quantitative Unterschiede gibt es bei ihnen ja ohnehin nicht. Folglich würde – unter der Voraussetzung, dass alles voll ist – jeder Ort bei der Bewegung immer nur das wieder ersetzt erhalten, was er soeben schon gehabt hatte, und der Zustand der Dinge würde vom anderen ununterscheidbar sein.“ (siehe [Leib1714])

mit der Konnotation des Heraklitschen

„παντα ρει“

die Wendung

„dass alles voll ist“

und denken dabei nicht nur an das Liouville-Theorem: Für komponent-stetige Kollektive ist der kontinuierliche Determinismus so beschaffen, „dass“ im Zustandsraum „alles voll ist“ mit - sensitiven Attraktoren – und zwar im Zustandsraum!

Die Leibnizsche Monadologie müsste so manchem Exegeten die Schwierigkeit bereitet haben, dass Leibniz seine Beschreibung der Monaden einerseits sehr unmissverständlich in einem Raum durchaus mit geometrischen Begriffen formuliert, der aber offensichtlich nicht der Konfigurationsraum sein kann. Beispielsweise ist – wie wir hier lesen – in dem Raum, in dem Leibniz die Monaden ansiedelt, alles voller Monaden, die allerdings zugleich vollkommen hermetische Gebilde sind und gleichsam „[...]keine Fenster [...]haben“. Als den Raum, in dem alles voll ist, denkt sich Leibniz schwerlich den Konfigurationsraum: Evangelista Torricelli wies bereits 1643 nach, dass Luft Gewicht hat. Otto von-Guericke hatte im Sommer 1657 sein berühmtes Halbkuglexperiment durchgeführt: Leibniz muss also wissen, dass Vakuum im üblichen Sinne hergestellt werden kann.

Wenn also die Monaden wesentlich auf der Grundlage einer Raumstruktur beschrieben

werden sollen, so muss doch geklärt werden, innerhalb welchen Raumes die Monaden liegen. Die zahlreichen Interpretationen der Monadologie stellen sich aber dieser Frage nicht. Alle Monaden sind überdies einmalig. Sie sind auch nicht als „Dinge“ gedacht, die in der physikalischen Raum-Zeit liegen. Darin, nicht in der Raum-Zeit zu liegen, sind sie so wie unsere Zimmer, die im Phasenraum liegen.

Der Gedanke, die Monaden als eine Vision sensitiver Attraktoren zu identifizieren, könnte sich einerseits als der Schlüssel zur Monadologie erweisen, die vielfach als dunkel empfunden wurde. Haben wir hier eine einzigartige interdisziplinäre exegetische Chance? Voltaire äusserte über Leibnizens Monadologie sogar, dass sie den „*gesunden Menschenverstand*“ [...] „*beleidige*“ und Voltaire verlieh damit seinem Befremden durch die Monadologie aufrichtig Ausdruck; anders als viele andere, die von der Beschwörung des Dunklen leben. Voltaire unterscheidet sich hier auch beispielsweise von Kant, der Leibniz in der Kritik der reinen Vernunft [Kant1781] recht fraglos kritisiert.

2.3 Zweiter Schritt: Maximale Quasiergodik und kinezentrische Felder

Wir haben nun eine der beiden am Schluss des ersten Abschnittes exponierten Aufgaben erfüllt. Wir haben nämlich die Äquivalenz (1.59) bewiesen, indem wir den Satz von der Existenz der Zimmer 2.1.2 zeigten. Die andere, verbleibende der beiden exponierten Aufgaben, die nach den Ausführungen des ersten Abschnitts die Essenz der Quasiergodenfrage bilden, ist die Aufgabe, die Gleichheit (1.58) zu beweisen. Wir müssen für jede jeweilige \mathcal{C}^1 -Flussfunktion binnen eines endlichdimensional-reellen Kompaktums die stückweise glatten minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten der Menge $\mathcal{M}^{1/2}([\Psi])$ mit den abgeschlossen Hüllen der Trajektorien aus der Menge $[\Psi]$ identifizieren. Wenn wir diese Aufgabe erfüllen, erreichen wir unser Ziel. Unser Satz von der Existenz von Zimmern liegt dabei auf dem restlichen Weg zu diesem unserem Ziel.

Wenn die Zimmer aus der Menge $[[\Psi]]$ minimale invariante Mannigfaltigkeiten der Menge $\mathcal{M}^0([\Psi])$ schneiden, so liegen die Zimmer offensichtlich immer ganz in jenen: Dass die Inklusionen

$$\mathcal{M}^0([\Psi]) \subset \left\{ \bigcup \Xi : \Xi \subset [[\Psi]] \right\} \quad (2.89)$$

und

$$\mathcal{M}^1([\Psi]) \subset \mathcal{M}^{1/2}([\Psi]) \subset \mathcal{M}^0([\Psi]) \quad (2.90)$$

und, dass die Implikation

$$\chi \in [[\Psi]] \Rightarrow \downarrow \left\{ \mu \in \mathcal{M}^0([\Psi]) : \mu \cap \chi \neq \emptyset \right\} \supset \chi \quad (2.91)$$

und deren zu ihr gegenläufiges Pendant, die Implikation

$$\mu \in \mathcal{M}^0([\Psi]) \Rightarrow \left\{ \chi \in [[\Psi]] : \mu \cap \chi \neq \emptyset \right\} \in \mathbf{part}(\mu) \quad (2.92)$$

für jede trajektorielle \mathcal{C}^1 -Partition eines Kompaktums $\bigcup[\Psi]$ eines endlichdimensionalen reellen Raumes gelten, ist nun nach dem Satz von der Existenz von Zimmern 2.1.2 evident. Der Operator \downarrow bezeichnet dabei wieder das Element jeder jeweiligen einelementigen Menge. Wir betonen aber sehr, dass, was wir zeigen wollen und was uns bedeutend zu sein scheint, eben nicht so offensichtlich ist, nämlich, dass die natürliche Partition

$$[[\Psi]] = \mathcal{M}^{1/2}([\Psi]) \quad (2.93)$$

ist. Dass diese Gleichheit gilt, impliziert hier nämlich letztlich die Identität

$$[[\Psi]] = \mathcal{M}^0([\Psi]) = \mathcal{M}^{1/2}([\Psi]) , \quad (2.94)$$

wie wir dies sogleich darlegen werden. In der Identität (2.93) öffnet sich uns der Blick auf den folgenden Sachverhalt:

Die Zimmer sind so gross, wie sie nach unseren Ausführungen vor der Formulierung des originalen Quasiergodensatzes 1.2.2 trivialermassen, d.h., von vornherein, höchstens sein können.

Deshalb nennen wir diese Eigenschaft von Zimmern die maximale Quasiergodik derselben, um so einen Extremal- und Ausschöpfungsaspekt der Identifizierung (2.93), die zugleich das Hinfälligwerden einer Unterscheidung ist, hervorheben zu können. Aussagenlogisch gesehen geht hier eine Unterscheidung im Hinfälligwerden einer Differenzierung unter:

Maximale Quasiergodik ist die Identität von Zimmern mit minimalen invarianten \mathcal{C}^0 -Mannigfaltigkeiten.

Wie kommt es denn nun zu der Identität der stückweise glatten minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten¹¹ mit den jeweiligen minimalen invarianten \mathcal{C}^0 -Mannigfaltigkeiten? Wenn wir zeigen, dass für jede trajektorielle \mathcal{C}^1 -Partition eines Kompaktums $[\Psi]$ die Identität (2.93) gilt, so zeigen wir nicht nur die maximale Quasiergodik, sondern wir zeigen dann auch, dass minimale invariante Mannigfaltigkeiten und minimale invariante \mathcal{C}^0 -Mannigfaltigkeiten für die trajektoriellen \mathcal{C}^1 -Partitionen eines Kompaktums eines endlichdimensionalen und reellen Raumes übereinstimmen. Dies lehrt folgendes Reduktionslemma, das innerhalb unserer Argumentation die Position eines Korollares der zu beweisenden Identität (2.93) einnimmt. Wir bezeichnen es dennoch als ein Lemma und heben es als einen eigenen Sachverhalt heraus, obwohl sein Beweis trivial ist. Das Reduktionslemma hilft nämlich dabei, die maximale Quasiergodik zu beweisen, indem es erlaubt, von der Gültigkeit der Identität (2.93) auf die Gültigkeit der Identität (2.94) zu schliessen, wobei wir die Gleichheit (2.93) anschliessend erst noch unabhängig von dem Reduktionslemma zu zeigen haben. Als ein Lemma sehen wir das Reduktionslemma auch deshalb an, weil es ganz allgemein eine Hilfe dabei ist, sich innerhalb von trajektoriellen \mathcal{C}^1 -Partitionen eines Kompaktums zu orientieren.

2.3.1 Reduktionslemma:

Ist $[\Psi]$ eine trajektorielle \mathcal{C}^1 -Partition eines Kompaktums eines endlichdimensionalen reellen Raumes, so gilt die Äquivalenz

$$[[\Psi]] = \mathcal{M}^0([\Psi]) \Leftrightarrow [[\Psi]] = \mathcal{M}^{1/2}([\Psi]) . \quad (2.95)$$

Beweis:

Wir gehen von der Richtigkeit der Identität (2.93) aus und brauchen daher nur die Implikation

$$[[\Psi]] = \mathcal{M}^{1/2}([\Psi]) \Rightarrow [[\Psi]] = \mathcal{M}^0([\Psi])$$

zu zeigen. Gemäss der Gleichheit (2.92) gibt es für jede minimale invariante \mathcal{C}^0 -Mannigfaltigkeit $\mu \in \mathcal{M}^0([\Psi])$ die Partition $P(\mu) \subset [[\Psi]]$ in Zimmer $\chi \in [[\Psi]] = \mathcal{M}^{1/2}([\Psi])$, die aber nach unserer Voraussetzung, dass die Identität (2.93) gilt, jeweils selber minimale invariante $\mathcal{C}^{1/2}$ -Mannigfaltigkeiten sind;

¹¹Dieselben nennen wir ja schlicht minimale invariante Mannigfaltigkeiten, was durch die Indifferenz (2.94) berechtigt ist.

und daher sind dieselben gemäss (2.90) jeweils alle auch minimale invariante \mathcal{C}^0 -Mannigfaltigkeiten. Dabei ist die Implikation

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{M}^0([\Psi]) \wedge b \in \mathcal{M}^{1/2}([\Psi]) \wedge a \cap b \neq \emptyset \\ \Rightarrow a \subset b \end{aligned}$$

trivial, sodass die Partition $P(\mu)$ nur ein einziges Element haben kann.

q.e.d.

Wenn wir nun für jede jeweilige \mathcal{C}^1 -Flussfunktion Ψ binnen einer abgeschlossenen Teilmenge ζ eines reellen Raumes \mathbb{R}^n der endlichen Dimension $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung f des Zustandsraumes ζ in einen endlichdimensionalen und reellen Raum \mathbb{R}^ν für $\nu \in \mathbb{N}$ genau dann identitiv bezüglich der zu Ψ gehörenden trajektoriiellen Partition $[\Psi]$ nennen, wenn für alle $x_1, x_2 \in \zeta$ die Implikation

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \mathbf{cl}(\Psi(x_1, \mathbb{R})) = \mathbf{cl}(\Psi(x_2, \mathbb{R})) \quad (2.96)$$

wahr ist, so lässt sich die Konsequenz des Reduktionslemmas so formulieren: Um die maximale Quasiergodik der trajektoriiellen \mathcal{C}^1 -Partitionen eines Kompaktums eines endlichdimensionalen und reellen Raumes zu zeigen, genügt es, vorzuführen, dass sich für jede solche trajektorielle Partition $[\Psi]$ eine global Lipschitz-stetige und identitive Abbildung finden lässt, die auf deren Zustandsraum ζ definiert ist.

Es ist kein Exotikum, das die Eigenschaft der Identitivität bezüglich einer jeweiligen trajektoriiellen \mathcal{C}^1 -Partition $[\Psi]$ eines Kompaktums ζ eines endlichdimensionalen und reellen Raumes hat:

Es sei für jede $\mathcal{C}^{1,-1/2}$ -Flussfunktion Φ binnen eines beschränkten Zustandsraumes eines endlichdimensionalen und reellen Raumes die Abbildung

$$\begin{aligned} \Omega_\Phi : \zeta &\rightarrow \zeta, x \mapsto \Omega_\Phi(x) \\ &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Phi(x, t) dt \end{aligned} \quad (2.97)$$

erklärt. Wir wollen exakt diese Abbildung Ω_Φ das kinezentrische Feld bezüglich der Flussfunktion Φ nennen. Ferner nennen wir exakt alle kinezentrischen Felder Ω_Φ bezüglich einer der $\mathcal{C}^{1,-1/2}$ -Flussfunktionen Φ , für die $[\Phi] = [\Psi]$ gilt,

die kinezentrischen Felder der trajektoriellen Partition $[\Psi]$. Ein kinezentrisches Feld Ω_Φ einer trajektoriellen Partition ist offensichtlich nicht nur von seiner trajektoriellen Partition $[\Psi]$, sondern auch von der Wahl der das kinezentrische Feld Ω_Φ indizierenden Flussfunktion abhängig. Für kinezentrische Felder gilt folgende

2.3.2 Bemerkung:

Die Eigenschaften kinezentrischer Felder von trajektoriellen Partitionen:

Alle kinezentrischen Felder jeder trajektoriellen \mathcal{C}^1 -Partition $[\Psi]$ eines Kompaktums eines endlichdimensionalen und reellen Raumes existieren. Diese kinezentrischen Felder sind dabei sowohl identitiv als auch Lipschitz-stetig.

Der folgende Beweis der Existenz der jeweiligen kinezentrischen Felder ist leicht generalisierbar und dessen erster Teil, der Beweis, dass kinezentrische Felder existieren, kann auch als Lösung einer Übungsaufgabe der Analysis 1 eines Analysiskurses aufgefasst werden.

Beweis:

Sei $\alpha \in \mathcal{C}([0, \infty), [1, 2])$ stetig. Für alle $t \in]0, \infty)$ existiert die Zahl

$$m(t) \alpha := \frac{1}{t} \int_0^t \alpha(s) ds \in [1, 2] .$$

T^∞ sei die Menge aller streng monotonen und divergenter positiv-reeller Folgen. Für $\{t(j)\}_{j \in \mathbb{N}} \in T^\infty$ existiert eine Teilfolge $\{t(j(k))\}_{k \in \mathbb{N}}$, für die $\{m(t(j(k)))\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in [1, 2]$ konvergiert. Es sei $b \in [1, 2]$ ein Häufungspunkt der Folge $\{m(b(j)) \alpha\}_{j \in \mathbb{N}}$ für eine Folge $\{b(j)\}_{j \in \mathbb{N}} \in T^\infty$, sodass die Folge $\{b(j(l))\}_{l \in \mathbb{N}}$ existiert, für die

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m(b(j(l))) \alpha = b$$

ist. Es gibt eine Teilfolge von $\{t(j(k))\}_{k \in \mathbb{N}}$, nämlich $\{t(j(k(l)))\}_{l \in \mathbb{N}}$, von der Art, dass für alle $l \in \mathbb{N}$

$$t(j(k(l))) < b(j(l)) < t(j(k(l+1)))$$

ist. $m(\text{id}) \alpha$ ist dabei eine \mathcal{C}^1 -Funktion. Die Werte ihrer Ableitung

$$\frac{d}{dt} m(t) \alpha = \frac{1}{t^2} (t \alpha(t) - m(t) \alpha)$$

existieren für alle $t \in [0, \infty)$. Wenn a und b verschieden wären, so käme m (id) α für beliebig grosse Argumente sowohl der Zahl a als auch der Zahl b beliebig nahe, sodass eine Folge $\{a(j)\}_{j \in \mathbb{N}} \in T^\infty$ existierte von der Art, dass

$$a(j) \alpha (a(j)) - m (a(j)) \alpha = 0$$

wäre; sodass für alle $j \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$2 \geq m (a(j)) \alpha \geq \alpha (a(j)) \geq a(j)$$

gültig wäre. Also existiert auch für zwei Zahlen $v, w \in \mathbb{R}$ mit $v < w$ und für eine Funktion $f \in \mathcal{C}([0, \infty), [v, w])$ der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds ,$$

denn es ist

$$(w - v) \mathcal{C}([0, \infty), [1, 2]) + (2v - w) = \mathcal{C}([0, \infty), [v, w])$$

und daher existieren auch alle kinezentrischen Felder Ω_Φ für alle $\mathcal{C}^{1,-1/2}$ -Flussfunktionen Φ , für die $[\Phi] = [\Psi]$ gilt. Soweit der Beweis, dass kinezentrische Felder existieren.

Und nicht nur diese kinezentrischen Felder Ω_Φ existieren: Für jede auf dem Zustandsraum ζ stückweise stetige, reelle Funktion f und für das Lebesgue-Mass λ auf dem Zimmer $\downarrow [[\Psi]]_{\{x\}}$, in dem x ist, existiert also für jeden Punkt $x \in \zeta$ die Flussfunktions-Invariante

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\Psi(x, t)) \frac{f(\Psi(x, t))}{||\partial_2 \Psi(x, t)||} dt &= \int_{\downarrow [[\Psi]]_{\{x\}}} f(x) d\lambda(x) \quad (2.98) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\Phi(x, t)) \frac{f(\Phi(x, t))}{||\partial_2 \Phi(x, t)||} dt , \end{aligned}$$

falls die Ableitung $\partial_2 \Phi(x, t)$ und der Bruch

$$\frac{f(\Phi(x, t))}{||\partial_2 \Phi(x, t)||}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren. Damit die Invarianz (2.98) gilt, muss Φ also eine parziell nach der zweiten Veränderlichen differenzierbare Flussfunktion Φ

sein, für die $[\Phi] = [\Psi]$ gilt.

Die Identität (2.98) ist die berühmte Boltzmannsche Scharmittel-Zeitmittel-Identifizierung. Wir erkennen schon jetzt, was im Fall allgemeinerer Gegebenheiten als der Gegebenheit von trajektoriellen \mathcal{C}^1 -Partitionen $[\Psi]$ eines Kompaktums eines endlichdimensionalen und reellen Raumes gilt: Ein Kriterium dafür, dass es die entsprechend verallgemeinerten Invarianten (2.98) gibt, ist neben der Lebesgue-Messbarkeit von f das Kriterium, dass überhaupt Lebesgue-messbare Zimmer als die abgeschlossenen Hüllen in ihnen liegender Trajektorien vorliegen und, dass die in ihnen liegenden Trajektorien stückweise glatt sind. Dabei wissen wir schon, dass Zimmer beschränkter komanent-immanenter Trajektorienkollektive existieren und Kompakta sind. Wir verweisen darauf, die Aussage (2.98) mit dem sogenannten Bowen-Ruelle-Theorem zu vergleichen, das z.B. in [EckRue85] zu finden ist.

Für alle $x \in \zeta$ und $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\Omega_{\Phi}(\Psi(x, 0)) = \Omega_{\Phi}(\Psi(x, t)) , \quad (2.99)$$

weil für alle $T \in \mathbb{R}^+$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Psi(x, s) ds - \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Psi(x, s+t) ds \right\| \\ & \leq \frac{1}{2T} \max\{\|\Psi(x, s)\| : s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

gilt: Wenn Ω_{Φ} stetig ist, so ist Ω_{Φ} auch identitiv.

Zeigen wir also die globale Lipschitz-Stetigkeit des kinezentrischen Feldes Ω_{Φ} auf dem gesamten Zustandsraum ζ , so ist damit auch die Stetigkeit und Identitivität von Ω_{Φ} und damit die maximale Quasiergodik gezeigt.

Um die Lipschitz-Stetigkeit von Ω_{Φ} auf ζ zu beweisen, betrachten wir den Differenzenquotienten

$$Q(x, y) := \frac{\|\Omega_{\Phi}(x) - \Omega_{\Phi}(y)\|}{\|x - y\|} \quad (2.100)$$

für $x \neq y$, $x, y \in \zeta$. Für $x \in \Psi(y, \mathbb{R}) \setminus \{y\}$ sei gesetztermassen $Q(x, y) := 0$. Sei $x \notin \Psi(y, \mathbb{R})$: Da die Abschätzung

$$\|\Omega_{\Phi}(x) - \Omega_{\Phi}(y)\| \leq \max\{\|\Psi(x, t) - \Psi(y, t)\| : t \in \mathbb{R}\} =: A(x, y)$$

gilt und die Kommanenz von $[\Psi]$ gegeben ist und ein Flussexponent $\kappa(\Psi)$ gemäss (2.18) existiert, für den für alle $t \in \mathbb{R}$ die Beschränkung

$$||\Psi(x, t) - \Psi(y, t)|| \leq ||x - y|| e^{\kappa(\Psi)|t|} \quad (2.101)$$

gilt, ist die Beschränkung

$$Q(x, y) \leq \frac{A(x, y)}{||\Psi(x, t) - \Psi(y, t)||} e^{\kappa(\Psi)|t|}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ eingehalten, wobei A die von (2.47) her bereits bekannte Metrik und stetige Funktion ist. Sei

$$\begin{aligned} \Upsilon : (\zeta)^2 &\rightarrow \mathbb{R}^+, (x, y) \mapsto \Upsilon(x, y) \\ &:= \inf \left\{ t \in \mathbb{R}^+ : ||\Psi(x, t) - \Psi(y, t)|| > \frac{1}{2} A(x, y) \right\}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Wenn diese Funktion Υ stetig ist, so nimmt sie auf $\zeta \times \zeta$ ihr Maximum

$$\Upsilon(\Gamma) := \max \left\{ \Upsilon(x, y) : x, y \in \zeta \right\} \quad (2.103)$$

an und es gilt für alle $x, y \in \zeta$

$$Q(x, y) \leq 2 e^{\kappa(\Psi) \Upsilon(\Gamma)}. \quad (2.104)$$

Ω_Φ ist dann Lipschitz-stetig und es ist die thematisierte maximale Quasiergodik gegeben.

Die Unstetigkeit der Abbildung Υ anzunehmen, führt aber auf einen Widerspruch:

Denn dann existierten zwei Zustände $v \in \zeta$ und $w \in \zeta$ im Zustandsraum und eine positive Zahl $\alpha \in \mathbb{R}^+$ von der Art, dass für jede positive Zahl $\beta \in \mathbb{R}^+$ die positive Definitheit

$$\max \left\{ ||w(t) - v(t)|| : t \in [0, \Upsilon(w, v) + \alpha] \right\} - \frac{1}{2} A(w, v) > 0 \quad (2.105)$$

wahr wäre, wobei dennoch für alle $\delta \in \mathbb{R}^+$ zwei Zustände $\omega, \nu \in \zeta$ zu finden wären, für die

$$||w - \omega|| < \delta < ||\nu - v||$$

und zudem

$$\max\left\{\|\omega(t) - \nu(t)\| : t \in [0, \Upsilon(\omega, \nu) + \beta]\right\} - \frac{1}{2}A(\omega, \nu) < 0 \quad (2.106)$$

gälte, wo doch die Kompatenz der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ vorausgesetzt ist und wir schon wissen, dass die Funktion A auf ihrem Definitionsbereich $\zeta \times \zeta$ stetig ist.

q.e.d.

Wegen dem Satz von der Existenz der Zimmer 2.1.2, dem Reduktionslemma 2.3.1 und schliesslich wegen der nunmehr gezeigten Bemerkung 2.3.2 folgt nun also die Identität der Menge der minimalen invarianten $\mathcal{C}^{1/2}$ -Mannigfaltigkeiten mit der Menge der minimalen invarianten \mathcal{C}^1 -Mannigfaltigkeiten einer jeweiligen trajektoriellen \mathcal{C}^1 -Partition $[\Psi]$ eines Kompaktums eines endlichdimensionalen und reellen Raumes und der

2.3.3 Identitätssatz:

Für jede trajektorielle \mathcal{C}^1 -Partition $[\Psi]$ eines Kompaktums eines endlichdimensionalen und reellen Raumes gilt

$$\mathcal{M}^0([\Psi]) = \mathcal{M}^{1/2}([\Psi]) = [[\Psi]] . \quad (2.107)$$

Kapitel 3

Anhang: kommentierende Ergänzungen

Allen Besinnungsvollen: Was war?

Wir verwiesen bereits hierher auf diesen Anhang. Dies geschah erstmals, als wir nach der Konstruktion minimaler invarianter Mannigfaltigkeiten einer trajektoriellen Partition behaupteten, dass diese minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten nicht einfach die Trajektorien der jeweiligen trajektoriellen Partition sind. Sowohl der Sachverhalt, dass eine jeweilige minimale invariante Mannigfaltigkeit mit einer Trajektorie übereinstimmt als auch die Negation desselben Sachverhaltes sind topologische Invariante. Daher genügt es, trajektorielle \mathcal{C}^1 -Partitionen zu betrachten, als deren Elemente es Trajektorien gibt, die von den glatten minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten differieren, in denen diese Trajektorien liegen. Das Kernstück einer Erläuterung der Differenz zwischen minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten und Trajektorien bildet demnach die Behauptung des folgenden Satzes:

Satz A.1: Die Nicht-Identität von glatten minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten mit glatten Trajektorien

Es sei $[\Psi]$ eine trajektorielle \mathcal{C}^1 -Partition des Zustandsraumes $\bigcup[\Psi]$, der ein Kompaktum eines endlichdimensionalen und reellen Raumes bezüglich dessen natürlicher Topologie sei. Alle Trajektorien der trajektoriellen Partition $[\Psi]$ sind entweder geschlossen oder quasiperiodisch. Wenn eine ihrer glatten minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten der Menge $\mathcal{M}^1([\Psi])$ mit einer Trajektorie τ aus $[\Psi]$ identisch ist, so ist τ geschlossen.

Beweis:

Es sei $m \in \mathbb{N}$ und

$$\beta = (\beta_k)_{1 \leq k \leq m} \in (\text{Inv}^1([\Psi]))^m$$

ein m -Tupel glatter Invarianten der kompakten trajektoriellen Partition $[\Psi]$.

Für $\omega = (\omega_k)_{1 \leq k \leq m} \in \mathbb{R}^m$ sei

$$\beta^{-1}(\{\omega\}) \in \mathcal{M}^1([\Psi])$$

eine glatte minimale invariante Mannigfaltigkeit dieser kompakten trajektoriellen Partition $[\Psi]$. Wenn diese minimale invariante Mannigfaltigkeit $\beta^{-1}(\{\omega\})$ mit einer Trajektorie $\tau \in [\Psi]$ koinzidiert, d.h., wenn $\beta^{-1}(\{\omega\})$ so beschaffen ist, dass es eine Trajektorie $\tau \in [\Psi]$ gibt, sodass

$$\beta^{-1}(\{\omega\}) = \tau$$

ist, so ist diese Trajektorie $\tau = \mathbf{cl}(\tau)$ abgeschlossen, mithin kompakt, weil die trajektorielle Partition $[\Psi]$ kompakt ist.

Betrachten wir die kompakte trajektorielle Partition $[\Psi]$ mit Trajektorien im \mathbb{R}^ν für eine natürliche Dimension ν weiter: Jede Trajektorie $\tau \in [\Psi]$ hat in jedem ihrer Punkte beidseitig unendliche Länge: Für alle $x \in \zeta$ existiert eine Funktion $\tilde{\Psi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \zeta)$ mit $\{\tilde{\Psi}(x, \mathbb{R})\} = [\Psi]_{\{x\}}$ und $\tilde{\Psi}(x, 0) = x$. Jede Folge $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ ist so beschaffen, dass für alle Häufungspunkte $\tilde{\Psi}(x, \iota)$ der Folge $\{\tilde{\Psi}(x, t_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Abbildung $\iota \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ von der Art existiert, dass dieser Häufungspunkt $\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{\Psi}(x, t_{\iota(j)}) = \tilde{\Psi}(x, \iota)$ der Grenzwert einer durch die Abbildung ι beschriebenen Teilfolge von $\{\tilde{\Psi}(x, t_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ ist. Die Trajektorie $\tilde{\Psi}(x, \mathbb{R})$ ist also immer entweder geschlossen und periodisch oder quasiperiodisch, wobei der Grenzwert $\tilde{\Psi}(x, \iota)$ in einer Teilmenge $\kappa \subset \bigcup [\Psi]$ des Zustandsraumes ist; letztere ist in dem Sinn n -dimensional, dass es eine lokale Basis von $n \in \mathbb{N}$ Elementen der Menge $B(\tilde{\Psi}(x, \iota)) := \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}^\nu$ gibt, die linear unabhängig ist; und diese Basis ist dabei von der Art, dass für eine positive reelle Zahl ε der in $\tilde{\Psi}(x, \iota)$ zentrierte Spat $\{\tilde{\Psi}(x, \iota)\} + \sum_{j=1}^n b_j[-\varepsilon, \varepsilon]$ in κ enthalten ist, wobei aber noch die folgende Bedingung eingehalten ist: Es gibt keine andere linear unabhängige Menge $\{c_1, \dots, c_{n+1}\}$ mit $n+1$ Elementen mit der Eigenschaft, dass der Spat $\{\tilde{\Psi}(x, \iota)\} + \sum_{j=1}^{n+1} c_j[-\varepsilon, \varepsilon]$ in κ enthalten ist. Dabei ist

$$\Theta_{\iota(j)}^z := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(j)}) - \delta_{1z} \tilde{\Psi}(x, \iota) - \delta_{0z} \tilde{\Psi}(x, t_{\iota(j)} - h)}{\|\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(j)}) - \delta_{1z} \tilde{\Psi}(x, \iota) - \delta_{0z} \tilde{\Psi}(x, t_{\iota(j)} - h)\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$$

lokalisiert in der zentrierten Einheitssphäre \mathbb{S}^{n-1} des \mathbb{R}^n , sodass alle Häufungspunkte der Folge $\{\Theta_{\iota(j)}^z\}_{j \in \mathbb{N}}$ in der Einheitssphäre \mathbb{S}^{n-1} liegen. All dieser Häufungspunkte Menge bezeichne für beide $z \in \{0, 1\}$ der Ausdruck $\Theta_z^* \subset \mathbb{S}^{n-1}$. Für jeden dieser Häufungspunkte $s \in \Theta_z^*$ gibt es eine Funktion $\iota(z, s) \in \iota(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ von der Art, dass für beide Indizes $z \in \{0, 1\}$ die Teilfolge $\{\Theta_{\iota(z,s)(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ gegen s konvergiert. Θ_0^* hat nur ein einziges Element. Dieses Element ist die Einheitstangente in dem Punkt $\tilde{\Psi}(x, \iota)$ an die Trajektorie, die durch den Punkt $\tilde{\Psi}(x, \iota)$ verläuft. Sonst wäre das Einheitstangentenfeld in $\tilde{\Psi}(x, \iota)$ nicht stetig. Dabei ist die Trajektorie $\tilde{\Psi}(x, \mathbb{R})$ geschlossen oder quasiperiodisch. Nehmen wir an, die Trajektorie $\tilde{\Psi}(x, \mathbb{R})$ sei abgeschlossen, also $\tilde{\Psi}(x, \mathbb{R}) = \mathbf{cl}(\tilde{\Psi}(x, \mathbb{R}))$: Für jede minimale invariante Mannigfaltigkeit $\beta = (\beta_k)_{1 \leq k \leq m} \in \mathcal{M}^1([\Psi])$ mit $\omega = (\omega_k)_{1 \leq k \leq m} \in \mathbb{R}^m$ mit $\beta^{-1}(\{\omega\}) \subset \tilde{\Psi}(x, \mathbb{R})$ gilt dann nach dem Taylorschen Satz für $s \in \Theta_1^*$ für alle $k \in \{1, ..m\}$ und $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \beta_k \left(\tilde{\Psi}(x, \iota) + (\tilde{x}_{\iota(1,s)(j)} - \tilde{\Psi}(x, \iota)) \right) = \beta_k \left(\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(1,s)(j)}) \right) \\
&= \omega_k + \nabla \beta_k(\tilde{\Psi}(x, \iota))^{\top} \left(\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(1,s)(j)}) - \tilde{\Psi}(x, \iota) \right) + \\
&\quad o \left(\|\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(1,s)(j)}) - \tilde{\Psi}(x, \iota)\|^2 \right) \\
&= \omega_k + \nabla \beta_k(\tilde{\Psi}(x, \iota))^{\top} s \|\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(1,s)(j)}) - \tilde{\Psi}(x, \iota)\| + \\
&\quad o \left(\|\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(1,s)(j)}) - \tilde{\Psi}(x, \iota)\|^2 \right) + \\
&\nabla \beta_k(\tilde{\Psi}(x, \iota))^{\top} \left(\frac{\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(1,s)(j)}) - \tilde{\Psi}(x, \iota)}{\|\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(1,s)(j)}) - \tilde{\Psi}(x, \iota)\|} - s \right) \|\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(1,s)(j)}) - \tilde{\Psi}(x, \iota)\| ,
\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}
&\nabla \beta_k(\tilde{\Psi}(x, \iota))^{\top} s + o \left(\|\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(1,s)(j)}) - \tilde{\Psi}(x, \iota)\|^2 \right) \\
&= \nabla \beta_k(\tilde{\Psi}(x, \iota))^{\top} \left(s - \frac{\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(1,s)(j)}) - \tilde{\Psi}(x, \iota)}{\|\tilde{\Psi}(x, t_{\iota(1,s)(j)}) - \tilde{\Psi}(x, \iota)\|} \right) ,
\end{aligned}$$

also

$$\nabla \beta_k (\tilde{\Psi}(x, \iota))^{\top} \Theta_1^* = 0 \quad (3.1)$$

gilt. Daher ist dann der Rang des Wertes der Jacobi-Matrix $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ an der Stelle $\tilde{x}(\iota)$

$$\text{Rg} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}(\tilde{x}(\iota)) \right) = n - \dim \Theta_1^* \quad (3.2)$$

und

$$\dim \Theta_1^* = \dim \beta^{-1}(\{\omega\}) . \quad (3.3)$$

Wenn also die Trajektorie $\tilde{\Psi}(x, \mathbb{R})$ abgeschlossen und quasiperiodisch, aber nicht geschlossen ist, ist diejenige glatte minimale invariante Mannigfaltigkeit $\beta^{-1}(\{\omega\})$ aus $\mathcal{M}^1([\Psi])$, in der die Trajektorie $\tilde{\Psi}(x, \mathbb{R})$ liegt, mindestens zweidimensional und nicht mit $\tilde{\Psi}(x, \mathbb{R})$ identisch. Wenn die Trajektorie $\tilde{\Psi}(x, \mathbb{R})$ nicht abgeschlossen ist, kann sie mit keiner minimalen invarianten Mannigfaltigkeit identisch sein.

q.e.d.

Zu der von diesem Satz behaupteten Nicht-Identität von minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten mit Trajektorien im Sinne der konzeptionellen Differenz, die zwischen den Trajektorien der Menge $[\Psi]$ und den glatten minimalen invarianten Mannigfaltigkeiten der Menge $\mathcal{M}^1([\Psi])$ besteht, gibt es insofern ein Gegenüber:

Es gibt nämlich die in der folgenden Definition A.2 konzipierte Stetigkeit der allgemeinen Flussfunktionen Ψ binnen deren jeweiligem Zustandsraum $\mathbf{P}_2\Psi$. Diese Form der Stetigkeit erweist sich als so beschaffen, dass genau dann, wenn die Restriktion $\Psi|(\chi \times \mathbb{R})$ die besagte Form von Stetigkeit hat, es auch wahr ist, dass jede Trajektorie

$$\Psi(x, \mathbb{R}) \in [\Psi] := \{\Psi(x, \mathbb{R}) : x \in \mathbf{P}_2\Psi\}$$

geschlossen ist, wenn sie in einem Unterrastandsraum $\chi \subset \mathbf{P}_2\Psi$ mit

$$\bigcup \Psi(\chi, \mathbb{R}) = \bigcup \{\Psi(z, \mathbb{R}) : z \in \chi\} = \chi \quad (3.4)$$

enthalten ist. Als Flussfunktionen im weiteren Sinn binnen einer beliebigen Menge $\mathbf{P}_2\Psi$ bezeichnen wir dabei ja exakt diejenigen Wellenfunktionen gemäss (1.55), die (1.56) erfüllen. Diese allgemeinen Flussfunktionen modellieren den Determinismus, der über die klassische Punktteilchenmechanik hinausgeht. Die besagte Form der Stetigkeit von allgemeinen Flussfunktionen im weiteren Sinn binnen deren jeweiligem Zustandsraum $\mathbf{P}_2\Psi$, die wir nach Pierre Simon de Laplace benennen, setzt voraus, dass auf dem Zustandsraum $\mathbf{P}_2\Psi$ eine Metrik d eingerichtet ist:

Definition A.2: Die Laplace-Stetigkeit einer Flussfunktion

Es sei Ψ eine Flussfunktion, deren Zustandsraum $\mathbf{P}_2\Psi$ durch die Metrik d metrisiert sei. Jede Restriktion $\Psi|(\chi \times \mathbb{R})$ einer solchen Flussfunktion Ψ nennen

wir genau dann Laplace-stetig bezüglich der Metrik d , wenn erstens $\chi \subset \mathbf{P}_2\Psi$ ein Untenzustandsraum ist, für den (3.4) gilt, und falls zweitens die Aussage

$$\begin{aligned} \forall (z, \delta) \in \chi \times \mathbb{R}^+ \exists \varepsilon(z, \delta) \in \mathbb{R}^+ \forall (x, t) \in \chi \times \mathbb{R} \\ d(z, x) < \varepsilon(z, \delta) \Rightarrow d(\Psi(z, t), \Psi(x, t)) < \delta \end{aligned} \quad (3.5)$$

wahr ist.

Genau dann, wenn $\Psi|(\chi \times \mathbb{R})$ Laplace-stetig bezüglich der Metrik d ist, sagen wir auch, dass Ψ auf dem Untenzustandsraum $\chi \subset \mathbf{P}_2\Psi$ bezüglich der Metrik d Laplace-stetig ist. Als Laplace-stetige Trajektorien bezüglich einer Metrik d bezeichnen wir dabei exakt die Mengen $\Psi(x, \mathbb{R})$ für Zustände $x \in \mathbf{P}_2\Psi$, die in einem Untenzustandsraum liegen, auf dem Ψ bezüglich d Laplace-stetig ist. Und wenn wir einfach von einer Flussfunktion Ψ reden, die Laplace-stetig bezüglich einer Metrik ihres Zustandsraumes $\mathbf{P}_2\Psi$ sei, so meinen wir exakt dies, dass diese Flussfunktion Ψ auf dem gesamten Zustandsraum $\mathbf{P}_2\Psi$ Laplace-stetig bezüglich seiner Metrik ist.

Dass wir dabei die Laplace-Stetigkeit einer Flussfunktion nach Pierre Simon de Laplace benennen, hat folgenden Grund: Die Laplace-Stetigkeit einer Flussfunktion gibt die Stetigkeitsauffassung des Determinismus wieder, der der Kinematik mechanischer Punktteilchensysteme unkritisch unterstellt worden war, bis Poincarè und Einstein darüber erstaunten, dass innerhalb der klassischen Kinematik mechanischer Punktteilchensysteme sehr wohl ein Entwicklungsverhalten auftreten kann, das eben nicht durch Flussfunktionen beschrieben werden kann, die Laplace-stetig sind. Zur Historie siehe beispielsweise [BriPea93].

Gerade Laplace darf dabei keineswegs als Propagator der explizit formulierten These angesehen werden, dass alle klassischen Kinematiken mechanischer Punktteilchensysteme durch Flussfunktionen Ψ beschrieben werden können, für die die Laplace-Stetigkeit gemäss (3.5) auf allen ihren jeweiligen Untenzustandsräumen $\chi \subset \mathbf{P}_2\Psi$ gegeben ist. Pierre Simon de Laplace hat diese Behauptung nie aufgestellt. Hätte er die Laplace-Stetigkeit gemäss (3.5) explizit formulieren können, so wäre sie ihm damit sogleich fragwürdig geworden. Dieser Irrealis redet dabei von der Möglichkeit, dass Laplace die Laplace-Stetigkeit in der modernen, post-Cantorschen Form gemäss (3.5) explizit formulieren kann. Diese Möglichkeit bestand aber für Laplace damals nicht.

Wie alle mathematischen Physiker des Intervalles von Newton bis Poincarè und Einstein hat sich aber auch Laplace so verhalten, als ob die Laplace-Stetigkeit eine natürliche Gegebenheit sei. Und er ist dabei neben Euler und Hamilton einer der herausragendsten Arbeiter unter jener unformulierten Annahme, dass die Laplace-Stetigkeit innerhalb der klassischen Kinematik mechanischer Punktteilchensysteme vorliege.

Dabei ist es Laplace, der ausserdem den Determinismus erstmalig durchaus problematisiert, jedoch nicht im Hinblick auf seine topologische Beschaffenheit an sich: Im Zusammenhang mit dem Thema des Determinismus bringt selbst der Laie den Determinismus mit dem von Laplace imaginierten Laplaceschen Dämon in Verbindung, der als perfekter Historiker alles zurückberechnen kann und der als Wahrsager alles vorausberechnen kann, falls ihm die sowohl ihrem Umfang als auch ihrer Qualität nach totale einmalige Kenntnis des Status Quo der Welt gegeben ist. Die Totalität der Qualität seiner Kenntnis ist hierbei, dass ihm die Bestandsaufnahme mit idealer Präzision aller Messungen vorliegt. Laplace denkt sich dabei den Determinismus noch als den Determinismus gemäss jener dämmerigen Unterstellung, dass irgendwie die Laplace-Stetigkeit innerhalb der klassischen Kinematik mechanischer Punktteilchensysteme gilt.

Damit, dass Laplace den nach ihm benannten Dämon imaginiert und damit, dass Laplace denselben der Wissenschaftsgeschichte der folgenden Jahrhunderte als die Flaschenpost, die jede einprägsame Denkwürdigkeit ja ist, aufgibt, inspiriert er zur Hinterfragung des Determinismus. Und damit regt Laplace auch dazu an, denselben auf seine Beschaffenheit an sich hin zu bedenken. Dadurch beispielsweise, dass Pierre Simon de Laplace den Kenntnisstand seines Dämons als einen Kenntnisstand anlegt, der nach einer Bestandsaufnahme mit idealer Präzision der Messungen vorliegt, leitet er auf natürliche Weise zu der Frage, was denn aber gelten würde, wenn selbst diesem Dämon die Idealität der Bestandsaufnahme nicht realisierbar wäre.

Gilt dann, wenn nur eine annäherungsweise Bestandsaufnahme möglich ist, dass eine annäherungsweise Rückwärts- und Vorwärtsentwicklung bestimmt werden kann? Und exakt diese Frage ist die Frage, die Poincarè und Einstein schliesslich negieren, indem sie die Gültigkeit der Laplace-Stetigkeit innerhalb der klassischen Kinematik mechanischer Punktteilchensysteme ausdrücklich und durchaus elektrisiert verneinen.

So gesehen eignet sich wohl niemand besser, der Stetigkeit gemäss (3.5) den Namen zu geben, als Pierre Simon de Laplace, die man ansonsten alternativ als die Prä-Poincarè-Einstein-Stetigkeit bezeichnen müsste.

Der besagte Korrespondenzpartner der Behauptung des Satzes A.1 ist die nun folgende Aussage über Laplace-stetige Flussfunktionen und deren Trajektorien:

Bemerkung A.3:

Die topologische Abgeschlossenheit Laplace-stetiger Trajektorien

Es sei Ψ eine Laplace-stetige Flussfunktion, deren Zustandsraum $\mathbf{P}_2\Psi$ durch die Metrik d metrisiert sei, welche die Topologie $\mathbf{T}(d)$ induziere. Dabei sei die topologisierte Flussfunktion $(\Psi, \mathbf{T}(d))$ so beschaffen, dass die zu (2.64) analoge

Form zustandsweiser Sensitivität für und nur für deren nicht triviale Zimmer

$$\chi \in \{\mathbf{cl}_{\mathbf{T}(d)}(\Psi(z, \mathbb{R})) : z \in \mathbf{P}_2\Psi\} \setminus \{\Psi(z, \mathbb{R}) : z \in \mathbf{P}_2\Psi\}$$

gegeben sei. Dann gilt die Identität

$$\Psi(z, \mathbb{R}) = \mathbf{cl}_{\mathbf{T}(d)}(\Psi(z, \mathbb{R})) \quad (3.6)$$

für alle Zustände $z \in \mathbf{P}_2\Psi$ des Zustandsraumes, wobei $\mathbf{cl}_{\mathbf{T}(d)}$ der auf die induzierte Topologie $\mathbf{T}(d)$ bezogene Hüllenoperator sei.

Beweis:

Es sei

$$x \in \mathbf{cl}_{\mathbf{T}(d)}(\Psi(z, \mathbb{R})) ,$$

sodass eine monoton wachsende Folge

$$\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$$

und die Zustandsfolge

$$\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}} := \{\Psi(z, t_j)\}_{j \in \mathbb{N}} \in (\mathbf{P}_2\Psi)^{\mathbb{N}}$$

existiert, für die

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d(z_j, x) = 0$$

ist. Wegen der Laplace-Stetigkeit der Flussfunktion Ψ gilt die Aussage

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+ \exists j(\delta) \in \mathbb{N} : \forall j \in]j(\delta), \infty[\cap \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$$

$$d(\Psi(z_j, t), \Psi(x, t)) < \delta .$$

Daher ist es ausgeschlossen, dass die zu (2.64) analoge Form zustandsweiser Sensitivität auf $\mathbf{cl}_{\mathbf{T}(d)}(\Psi(z, \mathbb{R}))$ vorliegt. Voraussetzungsgemäss ist x also ein Zustand des trivialen Zimmers $\mathbf{cl}_{\mathbf{T}(d)}(\Psi(z, \mathbb{R})) = \Psi(z, \mathbb{R})$. Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist also

$$\Psi(x, \mathbb{R}) = \Psi(z_j, \mathbb{R}) = \Psi(z, \mathbb{R})$$

und

$$\mathbf{cl}_{\mathbf{T}(d)}(\Psi(z, \mathbb{R})) \setminus \Psi(z, \mathbb{R}) = \emptyset .$$

q.e.d.

Wie die Zyklizität der Trajektorie $\Psi(z, \mathbb{R}) = \text{cl}_{\mathbf{T}(d)}(\Psi(z, \mathbb{R}))$ bezüglich der metrischen Topologie $\mathbf{T}(d)$ die Periodizität aller ihrer Zustände $y \in \Psi(z, \mathbb{R})$ bezüglich der stetigen Flussfunktion Ψ impliziert, haben wir bereits im ersten Kapitel beispielhaft für den Fall erörtert, dass $\mathbf{T}(d)$ eine natürliche Topologie eines endlichdimensionalen reellen Raumes ist. Offenbar ist jene Betrachtung analog anstellbar.

Es ist bemerkenswert, dass das fürwahr einfache Argument des Beweises der Bemerkung A.3 blosslegt, dass im Falle der Laplace-Stetigkeit alle Trajektorien abgeschlossen sind und damit periodische Zustandsentwicklungen beschreiben. Freilich, vorformale Vorstellungen sind psychologische Phänomene und keine logischen Objekte. Sie liegen als solche jenseits formaler Fassbarkeit und daher kann auch die Laplace-Stetigkeit nicht ins Dunkel der Kontinuitätsvorstellungen über den Determinismus der Laplaceschen Epoche zurück. Um so bemerkenswerter erscheint nichtsdestotrotz dieser Sachverhalt, wenn wir allem kritischen Streuben zum Trotz einmal so tun, als könnte jene starke Form der Stetigkeit einer Flussfunktion, die in der Definition A.2 als deren Laplace-Stetigkeit formuliert ist, dennoch die dunklen Kontinuitätsvorstellungen über den Determinismus der Laplaceschen Epoche wiedergeben: Dann hätte diese Kontinuitätsvorstellung die Periodizität aller Zustandsentwicklungen impliziert. Hätte Laplace diese Implikation universeller Periodizität geglaubt? Gewiss, Laplacs Blick auf das Planetensystem, das man damals noch leicht für vollendet periodisch halten konnte, markiert einen Interessenfokus gerade dieses Autors des fünfbändigen *Traité de mécanique céleste*, das als Laplacs Hauptwerk gilt. Das Interesse an der Himmelsmechanik dürfen wir dabei aber durchaus als das allgemeine paradigmatische Interesse Laplacs Zeit ansehen. Wird hier ein wenig ahnbar, wie sehr die mathematische Physik vor den formalen Fortschritten der das Kontinuum erforschenden Mathematik nach Laplace noch im Dunkel lag?

Wir warfen in diesem Anhang noch einen Blick zurück: Nämlich auf die Nostalgie des Determinismus. Erstens auf das Nostalgikum, sich die abgeschlossenen Hüllen jeweiliger Trajektorien nicht anders als die jeweiligen Trajektorien selbst zu denken.¹ Und zweitens auf das Nostalgikum der den Determinismus betreffenden Kontinuitätsvorstellung, die der Kinematik mechanischer Punktteilchensysteme unformalisiert und unkritisch unterstellt worden war

¹Sich die abgeschlossenen Hüllen jeweiliger Trajektorien anders als die jeweiligen Trajektorien selbst *vorzustellen*, ist zumindest eine gewisse Strapaze für die Imagination.

und die die Laplace-Stetigkeit formuliert.

Dieser Blick sollte uns die nötige Distanzierung von den in uns immer noch verfestigten nostalgischen Auffassungen vermitteln. Nach diesem distanzierenden Blick auf die Nostalgika des Determinismus sind wir nun gerüstet, die Aussage des elementaren Quasiergodensatzes auch imaginativ zu verinnerlichen, die die Beantwortung der objektivierten Quasiergodenfrage im Sinne P. und T. Ehrenfests ist – und insofern die Bestätigung der minimalinvasiven Abwandlung von Boltzmanns unhaltbarer Ergodenhypothese, deren tragische Genialität uns aufgehe.

Symbolverzeichnis

Neben den völlig etablierten Bezeichnungen benutzen wir in diesem Traktat auch weniger geläufige oder spezielle, für dieses Traktat idiomatische Notationen. Diese weniger geläufigen Schreibweisen führen wir im fortlaufenden Text ein und die Stellen, an denen diese Schreibweisen vorgestellt werden, sind im Index unter dem Stichwort „Notationskonvention“ vermerkt.

Es sei $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, A eine Menge, $E = \{e\}$ eine einelementige Menge, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ ein n -Tupel, $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ ein m -Tupel, Ψ eine Flussfunktion, ϕ eine Funktion, $q \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1, \dots\}$ ein Kontinuitätsindex und es sei α ein Mengensystem: Es ist dann

Ψ^t	der durch Ψ und t festgelegte Phasenfluss, d.h., die Bijektion $\Psi(\text{id}, t)$
$[\Psi]$	des Zustandsraumes auf sich, die durch Ψ festgelegte trajektorielle Partition, d.h., $[\Psi] := \{\Psi(x, \mathbb{R}) : x \in \mathbf{P}_2\Psi\}$,
$[[\Psi]]$	die durch Ψ festgelegte natürliche Partition, d.h., $[[\Psi]] := \{\mathbf{cl}(\tau) : \tau \in [\Psi]\}$,
$\text{Inv}^q([\Psi])$	die Menge Invarianter der Kontinuität q der trajektoriiellen Partition $[\Psi]$,
$\mathcal{M}^q([\Psi])$	die Menge deren minimaler invarianter Mannigfaltigkeiten der Kontinuität q ,
$\mathbf{part}(A)$	die Menge aller Partitionen der Menge A ,
α^\cup	das Mengensystem aller Vereinigungen über Teilmengen von α ,
α_A	die A -Auswahl aus α , d.h., $\{a \in \alpha : a \cap A \neq \emptyset\}$,
$\downarrow E = e,$	das Element der einelementige Menge E ,
$\mathbf{P}_j\Lambda = \lambda_j$,	
$\mathbf{P}_1\phi$	die Definitionsmenge von ϕ ,
$\mathbf{P}_2\phi$	die Wertemenge von ϕ ,
$A^{\mathbb{N}}$	die Menge aller Folgen $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, deren Glieder Elemente der Menge A sind,
$\mathbb{B}_r(x)$	die offene Kugel des \mathbb{R}^n , in dem x ist, deren Mittelpunkt x ist und die den Radius r hat,

\sim	die Homöomorphie zweier Teilmengen des \mathbb{R}^n ,
$\sim\sim$	die relative Homöomorphie zweier Teilmengen des \mathbb{R}^n oder des \mathbb{R}^m ,
\oplus	die Kokatenation, sodass $\Theta \oplus \Lambda = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ ist,
\otimes	das Kroneckerprodukt,

das so erläutert sei: Ist

$$A = (a_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

eine $m \times n$ -Matrix $A \in K^{m \times n}$ über dem Körper $(K, +, \cdot)$ und

$$B = (b_{jk})_{1 \leq j \leq u, 1 \leq k \leq v} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1v} \\ \dots & & & \\ b_{u1} & b_{u2} & \dots & b_{uv} \end{pmatrix},$$

eine $u \times v$ -Matrix $B \in K^{u \times v}$ über dem selben Körper $(K, +, \cdot)$, so ist diejenige $mu \times nv$ -Matrix über dem selben Körper $(K, +, \cdot)$, deren Matrixelemente für alle

$$(j, k, \alpha, \beta) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, u\} \times \{1, 2, \dots, v\}$$

zwischen der $j(\alpha-1)$ -ten und der $j\alpha+1$ -ten Zeile und der $k(\beta-1)$ -ten und der $k\beta+1$ -ten Spalte auch hinsichtlich ihrer Anordnung mit den Matrixelementen der Matrix

$$a_{jk}B = (a_{jk}b_{rs})_{1 \leq r \leq u, 1 \leq s \leq v} = \begin{pmatrix} a_{jk}b_{11} & a_{jk}b_{12} & \dots & a_{jk}b_{1v} \\ \dots & & & \\ a_{jk}b_{u1} & a_{jk}b_{u2} & \dots & a_{jk}b_{uv} \end{pmatrix}$$

identisch sind, das Kroneckerprodukt

$$A \otimes B$$

der $m \times n$ -Matrix A und der $u \times v$ -Matrix B . Dadurch ist die Verknüpfung \otimes , die offenbar im Allgemeinen eklatant nicht kommutiert, für alle $m, n, u, v \in \mathbb{N}$ auf jeder Menge $K^{m \times n} \times K^{u \times v}$ definiert.

Literaturverzeichnis

- [Anos88] D.V Anosov u. V.I.Arnold: *Dynamical Systems*, Berlin: Springer 1988
- [Arnold68] V.I.Arnold u. A.Avez: *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, New York: Benjamin 1968
- [BriPea93] J.Briggs u. F.Peat, *Die Entdeckung des Chaos*, Muenchen: dtv 1993
- [CigRei87] J.Cigler u H.C.Reichel: *Topologie, eine Grundvorlesung*, Mannheim: Bibliographisches Institut 1987
- [CouHil1931] R.Courant u. D.Hilbert: *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin: Julius Springer 1931-37
- [Devaney89] R.L.Devaney: *An introduction to chaotic dynamical Systems*, New York: Wesley 1989
- [EckRue85] J.-P. Eckmann u. D.Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985)
- [Ehrenf12] P.u. T Ehrenfest: *Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik*, Enzykl.d.math.Wiss. IV, 2, II
- [Elst1996] J. Elstrodt: *Maß und Integrationstheorie*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1996
- [GarSimo83] L.Garrido u. C.Simó: *Dynamical Systems and Chaos*, Berlin: Springer Lecture Notes in Physics 179 1983
- [Irwin980] M.C.Irwin: *Smooth Dynamical Systems*, London: Academic Press 1980

- [Kant1781] I.Kant: *Kritik der reinen Vernunft*, Stuttgart: Philipp Reclam jun. 1982
- [Leib1714] G.W.Leibniz: *Monadologie*, Stuttgart: Philipp Reclam jun. 1986
- [Reichl980] L.E. Reichl: *A Modern Course in Statistical Physics*, Austin: University of Texas Press 1980
- [Smale1967] S.Smale: *Am. Math.Soc.* **73**, 747 (1967),
- [Walter82] S.Walters: *An Introduction to Ergodic Theory*, Berlin: Springer 1982